

## MPS 法に基づく土構造物の弾塑性変形解析に関する研究

環境防災研究室 八木 啓介

指導教官 大塚 悟, 磯部 公一

### 1. はじめに

本研究の目的は、地震および水害による地盤構造物の崩壊メカニズムを明らかにし、限界状態・残留変位量を適切に解析できる手法を構築し、地盤構造物の性能規定化の一助とすることにある。

そこで本研究では、大変形問題や複雑界面追跡に優れた解析手法として粒子法のひとつである MPS 法に着目し、地盤変形解析への適用性を検討するために第一段階として、Drucker-Prager 型降伏関数を用いた弾塑性動的解析コードを構築し、その妥当性について検討した。

### 2. MPS 法に基づく弾塑性動的解析

#### 2.1 弾性モデル

MPS 法の弾塑性動的解析手法に関しては越塚ら<sup>1)</sup>によって定式化されている。本研究では、FEM で一般的に用いられる弾塑性解析手法を導入し、MPS 法における弾塑性動的解析コードを構築した。以下にその計算方法について示す。弾塑性体の粒子  $i$  における運動方程式および粒子間  $ij$  の応力の式は以下のように書ける。

$$\rho_i \frac{D\dot{\mathbf{r}}_i}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{K}_i = \text{div} \boldsymbol{\sigma}_i + \mathbf{K}_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{ij} = \lambda(\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}]_{ij})\mathbf{I} + 2\mu[\boldsymbol{\varepsilon}]_{ij} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{r}}$  : 速度ベクトル、 $\rho$  : 密度、 $\boldsymbol{\sigma}$  : 応力テンソル、 $\boldsymbol{\varepsilon}$  : ひずみテンソル、 $\mathbf{K}$  : 外力ベクトル、 $\lambda, \mu$  : ラメの定数である。指標  $i$  は粒子  $i$  において、指標  $ij$  は粒子  $i$  と粒子  $j$  の粒子間  $ij$  において、という意味である。粒子間の全ひずみテンソルは粒子座標位置から計算される粒子間距離ベクトル  $\mathbf{r}_{ij}$  と剛体回転成分を除去した粒子間変位ベクトル  $\mathbf{u}_{ij}$  のテンソル積から計算する。なお、全ひずみテンソルは対称テンソルで定義する。

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{ij} = \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{u}_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{r}_{ij} \otimes \mathbf{u}_{ij})}{|\mathbf{r}_{ij}| |\mathbf{r}_{ij}^0|} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{u_{ij}^x r_{ij}^x}{|\mathbf{r}_{ij}| |\mathbf{r}_{ij}^0|} & \frac{1}{2} \left( \frac{u_{ij}^x r_{ij}^y + u_{ij}^y r_{ij}^x}{|\mathbf{r}_{ij}| |\mathbf{r}_{ij}^0|} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{u_{ij}^x r_{ij}^y + u_{ij}^y r_{ij}^x}{|\mathbf{r}_{ij}| |\mathbf{r}_{ij}^0|} \right) & \frac{u_{ij}^y r_{ij}^y}{|\mathbf{r}_{ij}| |\mathbf{r}_{ij}^0|} \end{bmatrix}_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_{ij}$$

粒子  $i$  における応力の発散は MPS 法の加重平均、発散モデルを用いて以下の式で考える。(2)式第一項は以下の式から求められる。

$$\lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}]_{ij} = \lambda \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})_{ij} w_{ij} = p_i \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{div}(\lambda(\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}]_{ij})) = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(p_i + p_j)}{|\mathbf{r}_{ij}| |\mathbf{r}_{ij}^0|} \mathbf{r}_{ij} w_{ij} \quad \dots\dots\dots (5)$$

第二項も同様に発散モデルを用いて次のように表される。

$$\text{div}(2\mu[\boldsymbol{\varepsilon}]_{ij}) = 2\mu \frac{2d}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{[\boldsymbol{\varepsilon}]_{ij} \mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}| |\mathbf{r}_{ij}^0|} w_{ij} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $d$  は次元数、 $n^0$  は粒子数密度、 $w$  は重み関数である。重み関数は、粒子間距離の関数であり、以下の式で表される。

$$w(|\mathbf{r}_{ij}|) = \begin{cases} \frac{r_e}{|\mathbf{r}_{ij}|} - 1 & (0 < |\mathbf{r}_{ij}| < r_e) \\ 0 & (r_e \leq |\mathbf{r}_{ij}|) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$n_i^0 = \sum_{j \neq i} w^0(|\mathbf{r}_{ij}^0|) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$r_e$  は影響半径という計算パラメータでありこれにより、着目粒子  $i$  から影響半径内に位置する近傍粒子を決定し、重み関数を計算する(図-1)。本解析では、 $r_e = 2.9l^0$  と設定した。粒子数密度は、初期の粒子配置における着目粒子  $i$  の全ての近傍粒子との重み関数の総和である。

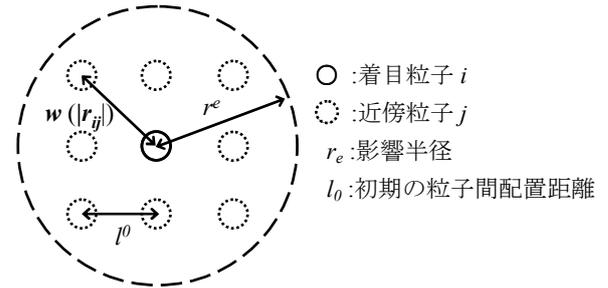


図-1 粒子間相互作用

粒子間にせん断力が作用するとトルクが発生するので角運動量保存則が保存されない。角運動量を保存させるためには、このトルクを打ち消すように付加的にトルクを与えなければならない。

$$I_i \left[ \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \right] = -\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \mathbf{T}_{ij} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\mathbf{T}_{ij} = -\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\mathbf{F}_{ij} = m_i \left[ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{ij}}{\partial t} \right]_s = \frac{m_i}{\rho_i} \frac{2d}{n^0} \frac{\mathbf{t}_{ij}^s}{|\mathbf{r}_{ij}^0|} w_{ij} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$I_i = \frac{m_i l_0^2}{6} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $\mathbf{t}_{ij}^s$  : せん断力、 $I$  : 慣性モーメント、 $\mathbf{T}_{ij}$  : 粒子間で発生したトルク、 $m$  : 粒子1個の質量である。トルク  $\mathbf{T}_{ij}$  は粒子  $i, j$  の各々に 1/2 の割合で配分される。

以上を用いて、verlet法による時間積分を行い位置座標、速度、角速度および回転角を更新する。

$$\mathbf{r}_i^{k+1} = (2\mathbf{r}_i^k - \mathbf{r}_i^{k-1}) + \frac{D\dot{\mathbf{r}}}{Dt} \Delta t^2 \dots\dots\dots(13)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i^{k+1} = \frac{(\mathbf{r}_i^{k+1} - \mathbf{r}_i^k)}{\Delta t} \dots\dots\dots(14)$$

$$\omega_i^{k+1} = \omega_i^k + \frac{\partial \omega}{\partial t} \Delta t \dots\dots\dots(15)$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \omega_i^{k+1} \Delta t \dots\dots\dots(16)$$

ここに  $k$ : 解析ステップ,  $\Delta t$ : 計算時間間隔( $=1.0 \times 10^{-5}$  sec)である. さらに, 本解析では吉田ら<sup>2)</sup>の手法に基づいて減衰項の導入を行った.

### 2.2 弾塑性モデル

本解析では, 降伏関数に *Drucker-Prager* 型を用いる. *Drucker-Prager* 型の降伏関数  $f$  は応力の第一不変量  $I_1$  および偏差応力の第二不変量  $J_2$  によって表される関数である. (17)式に引っ張りを正と定義した *Drucker-Prager* 型の降伏関数  $f$  を示す.

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - \kappa \dots\dots\dots(17)$$

ここで,  $\alpha, \kappa$  は土の強度定数  $c, \phi$  に関係付けられる係数である. 塑性ひずみ増分は流れ則より(18)式から求められる.

$$\{d\varepsilon_p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

$d\lambda$  は一般的な FEM で用いられる(19)の式から与えられる.

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D]^e \{d\varepsilon\}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D]^e \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}} \dots\dots\dots(19)$$

これより塑性ひずみ増分および塑性ひずみが求められる. 弾性ひずみは全ひずみと塑性ひずみと差から求める.

$$[\varepsilon]_y^e = [\varepsilon]_y - [\varepsilon]_y^p \dots\dots\dots(20)$$

弾塑性解析では, ひずみに弾性ひずみを用いて前に示した弾性解析の計算を行う.

### 3. 大変形問題に対する解析事例

MPS法は, 解析対象に粒子を用いている. これよりDEMとほぼ同様の計算方法から離散体同士の衝突のような現象も計算することができる. 土塊が分裂するような大変形問題では, 初期の粒子配置において近傍粒子でなかった粒子, また近傍粒子であっても粒子間の応力状態が*Drucker-Prager*型降伏関数の尖角に達したとき粒子間において連続体の関係から離散体へと切断処理を行う. 切断処理は, 粒子間の重み関数を0とすることで粒子間の相互作用をないものにする. これら離散体の関係にある粒子間が接近した際にDEMの計算手法に基づき, 衝突応答の計算を行い, 座標位置を修正する.

大変形の計算事例に用いた解析粒子モデルを図-2に, 解析に用いた物性値を表-1に示す. 本解析では, 自重に

よる土塊の崩落をシミュレーションした.

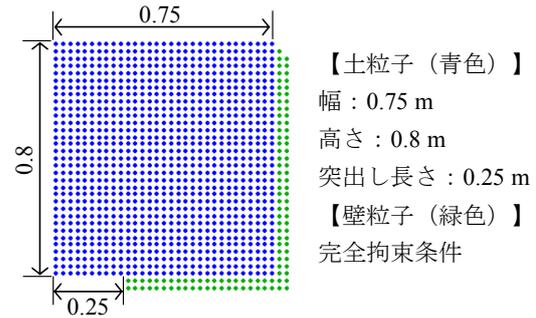


図-2 解析粒子モデル

表-1 解析に用いた物性値

弾性係数 $E$ [kN/m <sup>2</sup> ]	5000
ポアソン比 $\nu$	0.35
粘着力 $c$ [kN/m <sup>2</sup> ]	5.0
内部摩擦角 $\phi$ [deg]	5.0
粒子の密度 $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1660
減衰比 $h$	0.01

解析結果より得たモデルの経時変化を図-3に示す. 各部分で土塊を維持したままの分裂や, 衝突が再現できた.

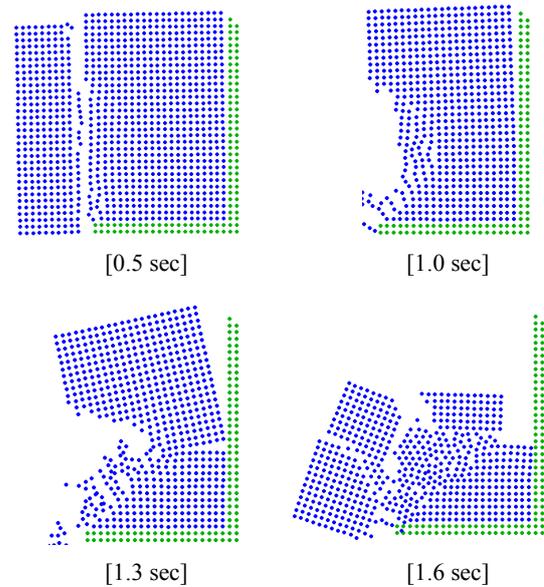


図-3 土塊の崩落状況

### 4. まとめ

MPS法の弾塑性動的解析コードを構築し, 地盤材料に対するシミュレーションすることでMPS法の地盤変形解析への適用性について検討した. MPS法では大変形や分裂といった現象を扱えることから, これまで解析することのできなかった事象に対しても有効な可能性を秘めている. 今後も, 検討および発展に期待できる.

<参考文献>

- 1) 越塚誠一: 計算レクチャーシリーズ 5 粒子法, 丸善, 2005.
- 2) 吉田ら: MPS 法を用いた地震応答解析のための基礎検討, 土木学会論文集 A, Vol. 66 .No.2, pp. 206-218, 2010.