

第 3 不変量を含む等方硬化型弾塑性構成モデルに 適した応力積分アルゴリズム

小田 隆行*
Takayuki ODA

*長岡技術科学大学大学院工学研究科建設工学専攻（主査：宮木 康幸 助教授）

1. はじめに

地盤材料などの摩擦性材料には、Drucker-Prager モデル、Mohr-Coulomb モデルなどがあり、これらの降伏面は、等方性材料の場合には一般的に主応力空間で定義される。降伏面の特性は、いわゆる p - q 面に対する投影形状と、偏差応力面における降伏面の断面形状によって表現される。これらのモデルではいずれも、降伏面の形状は等方応力に強く依存したもとなっている。一方、上記モデルのうち Mohr-Coulomb モデル以外は、偏差応力面における降伏面の断面形状は静水圧軸を中心とした同心円である。しかし、引張り側よりも圧縮側の降伏（破壊）応力が多いという地盤材料の一般的な特性を表現するには、このようなモデルでは不十分だと考えられている。こうした特性は、偏差応力面における降伏面の断面形状が同心円ではなく、ゆがんだ六角形である Mohr-Coulomb モデルや、より滑らかな断面形状を持つ Matsuoka-Nakai モデルや Lade-Duncan モデルなどでなければ表現できない。このような降伏面の形状を数学的に表現するには、降伏関数に応力の第 3 不変量を導入する必要がある。

これまでの応力積分アルゴリズムは、速度型の定式化に基づき前進差分法が用いられてきた。しかしこれは、小さい増分幅で、多くのステップ数による計算が必要なので、計算効率上不利であり、解の収束速度が低い。また、塑性変形時には、応力が降伏面に載っている保証が無いため、誤差が蓄積する懸念がある。

そこで本研究では、降伏関数に応力の第 3 不変量を含む弾塑性モデルの後退差分法を用いた応力積分アルゴリズムを提案する。この方法では、応力を降伏面上に return map するため、硬化・軟化に関わらず、解の収束が非常に早く、かつ、常に応力が降伏面にのっている事が保証された高精度の解が得られる。つまり、大きな増分幅をとっても精度低下が少なく、収束も早いとされている。ここでは、第 3 不変量を含む等方硬化型弾塑性構成モデルに適した応力積分アルゴリズムの定式化および、精度と収束性のパフォーマンスを調査する。

2. リターンマッピング法

第 3 不変量を含む等方硬化型弾塑性構成モデルに適した応力積分アルゴリズムの定式化は、応力とひずみの主軸系表示および、主応力軸におけるリターンマッピング法に基づいている。本研究では Matsuoka-Nakai モデル

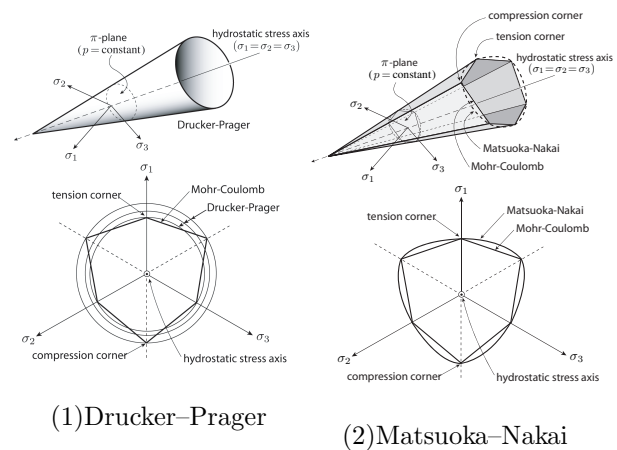


図-1 降伏面の形状

を取り扱ったが、その他のモデルでも同様の方法が適用できる。

増分形式の流れ則を弾性対数主ひずみ空間で表すと、return map の式は、

$$\epsilon_{A,n+1}^e = \epsilon_{A,n+1}^{e,(tr)} - \frac{\Delta\lambda}{J_{n+1}} \frac{\partial g_{n+1}}{\partial \sigma_A} \quad (A = 1, 2, 3) \quad (1)$$

となる。このとき、 $\epsilon_{A,n+1}^e$ は主応力ベクトルの一次関数であり、 ϵ は対数主ひずみを、上付きの e はその弾性部分を、下付きの A は主軸インデックスを表している。また、上付きの (tr) は試行値を示す。 $\Delta\lambda$ は増分表示の塑性乗数を示す。 J は体積変化、 g は塑性ポテンシャル関数、 f は降伏関数を表している。また、 t_n は諸量が既知である時刻、 t_{n+1} は諸量が未知である時刻を表している。

応力の 3 つの不変量を導入した降伏関数の一般形は次式のように表される。

$$f(\sigma, \kappa) = (k_1 I_3)^{1/3} - h(I_1, I_2), \quad k_1 = c_0 + \kappa_1 \left(\frac{P_a}{I_1} \right)^m \quad (2)$$

ここで、Cauchy 応力の第 1、第 2、第 3 不変量をそれぞれ、

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (3)$$

とする。 c_0 と m は材料定数である。 P_a は I_1 を無次元化するための定数である。今回は Matsuoka-Nakai モデル

ルを用いるので、

$$h(I_1, I_2) = (I_1 I_2)^{1/3}, \quad c_0 = 9, \quad m = 0 \quad (4)$$

となる。

摩擦に関する硬化・軟化を表す内部変数 $\kappa_1(\sigma, \lambda)$ については、発展則は非関連型である。残差ベクトル $R(x)$ および一般化未知量ベクトル x を次のように定義する。

$$R(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{A,n+1}^e - \varepsilon_{A,n+1}^{e,(tr)} + \frac{\Delta\lambda}{J_{n+1}} \frac{\partial g_{n+1}}{\partial \sigma_A} \\ \kappa_1 - \tilde{\kappa}_1(\sigma, \lambda) \\ f(\sigma, \kappa_1) \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad x = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \kappa_1 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} \quad (5)$$

以下では、非線形方程式 $R(x) = \mathbf{0}$ を x について線形化し、反復解法により解くこととなる。第 k 回目の反復での修正量を $\delta x^{(k)}$ とし、

$$R(x) + A(x) \cdot \delta x = \mathbf{0}, \quad A(x) = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \rightsquigarrow \delta x = -A^{-1}(x) \cdot R(x), \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x \quad (6)$$

というように $\|R\| < \text{TOL}$ となるまで x の更新を繰り返す。

3. Consistent 接線剛性

前述の応力積分アルゴリズム (local iteration) と整合したものが consistent 接線剛性である。Consistent 接線剛性は塑性論の速度型定式化とは別の、アルゴリズム上での接線係数であり、global iteration の接線剛性に用いる。Newton-Raphson 法による非線形つり合い式の解法において、consistent 接線係数を用いることにより、Newton-Raphson 法本来の 2 次収束が保証される。このとき、global iteration と local iteration との整合が取れていることが重要である。

弾塑性状態における consistent 接線係数 a^{ep} は、Kirchhoff 主応力 τ を試行弾性主ひずみ $\varepsilon^{e,(tr)}$ で偏微分することにより、

$$a^{\text{ep}} = \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon^{e,(tr)}} = a^e \cdot \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon^{e,(tr)}}, \quad a^e = \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon^e} \quad (7)$$

と求められる。導出の詳細は省略する。

4. 精度検証

2章で述べた応力積分アルゴリズムを用い、1要素の立方体を対象として、解析を行くことにより、応力積分アルゴリズムの精度を検証し、大きな増分ステップ幅においても高精度であることを確認する。解析に用いた材料パラメータは、表 1 に示す。

ここでは、増分幅依存性の検証を行う。初期状態における変形勾配を $F_0 = \mathbf{1}$ (ここでは $\mathbf{1}$ は 2 階の単位テンソル) とし、各载荷ステップ $n = 1, \dots, n_{\text{step}}$ 毎に F_n を変化させながら、所定の変形レベル $F_{n_{\text{step}}}$ に達するまで計算を行った。ステップ間の相対変形勾配を f とし、全

表-1 材料定数

E	100MPa	a_1	5000
ν	0.2	a_2	0.5kPa^{-1}
P_a	-100kPa	a_3	0.1
θ_f	0°	σ_1	-100kPa
m	0.23	σ_2	-100kPa
α	0.5	σ_3	-100kPa

ステップで f は一定とすると、ステップ n における変形勾配 F_n は、微分の連鎖側より、

$$F_n = f \cdot F_{n-1} = f \cdots f \cdot F_0, \quad f = (F_{n_{\text{step}}})^{1/n_{\text{step}}} \quad (8)$$

となる。ここで用いた変形制御の方法は次式に示すとおりで、応力計算における履歴依存性を調べるために、ステップ数 n_{step} を変化させて所定の $\varepsilon_v, \varepsilon_s$ に達するまで解析を行う。

$$f = \begin{bmatrix} 1 + \Delta x_{v_1} & 0 + \Delta x_s & 0 \\ 0 & 1 + \Delta x_{v_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \Delta x_{v_3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

このとき、

$$\Delta x_{v_1} = \Delta x_{v_2} = \Delta x_{v_3} = \varepsilon_v / n_{\text{step}}, \quad \Delta x_s = \varepsilon_s / n_{\text{step}} \quad (10)$$

とする。ステップ数は $n_{\text{step}} = 10, 100, 1000, 10000$ と変化させる。

なお、ひずみは対数ひずみ ε を用いており、体積ひずみ ε_v 、せん断ひずみ ε_s はそれぞれ、

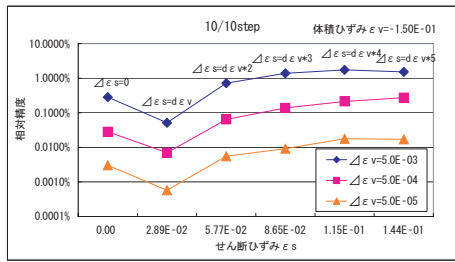
$$\varepsilon_v = \text{tr}[\varepsilon], \quad \varepsilon_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\text{dev}[\varepsilon]\|, \quad \text{dev}[\varepsilon] := \varepsilon - \frac{1}{3} \varepsilon_v \mathbf{1} \quad (11)$$

と定義される対数ひずみの等方成分、偏差成分に関する不変量である。応力については Cauchy 応力 σ を用いており、等方応力 p 、せん断応力 q はそれぞれ、

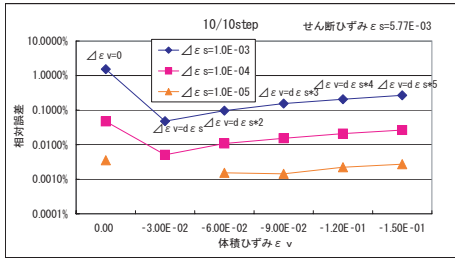
$$p = \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma], \quad q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}[\sigma]\|, \quad \text{dev}[\sigma] := \sigma - p \mathbf{1} \quad (12)$$

と定義される対数ひずみの等方成分、偏差成分に関する不変量である。また、連続体力学の習慣に従って引張りを正としている。

図 2 は、体積ひずみ ε_v または、せん断ひずみ ε_s のいずれかを固定して、もう一方を変化させたときの相対誤差を示している。例えば、体積ひずみ ε_v を固定したときは、 $\varepsilon_v = 5.0 \times 10^{-6}$ (ステップ数 10000 回) を基準として $\varepsilon_v = 5.0 \times 10^{-3}$ (ステップ数 10 回), 5.0×10^{-4} (ステップ数 100 回), 5.0×10^{-5} (ステップ数 1000 回) との差を相対誤差とする。 $\varepsilon_v = 5.0 \times 10^{-3}$ のとき、計算ステップ数を 10 とし、その 10 ステップ目の値を用いる。 $\varepsilon_v = 5.0 \times 10^{-4}, 5.0 \times 10^{-5}, 5.0 \times 10^{-6}$ のときは、その 10 ステップ目の値と総増分幅で重なる値を用いる。図 3 は、体積ひずみ：せん断ひずみ = 4 : 1 のときの応力経路を表している。ステップ数が 10 の経路と 10000 の経路がほぼ同じものとなっていることが分かる。以上のことより、このアルゴリズムでは、せん断ひずみ ε_s または、

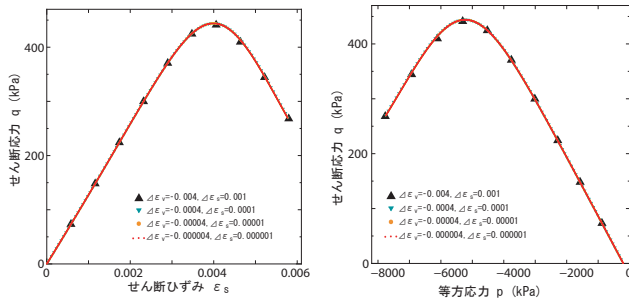


体積ひずみ固定



せん断ひずみ固定

図-2 相対誤差



せん断ひずみ-せん断応力

応力経路

図-3 $\varepsilon_v : \varepsilon_s = 4 : 1$

体積ひずみ ε_v のいずれかを 0 にすると、相対誤差が比較的大きくなるのが分かる。 ε_v を大きくすると、相対誤差も大きくなる傾向が見られる。今回の精度調査では、最大誤差が 3.074% となったが、通常 3%~5% は許容範囲と言われており、ステップ数を大きくとらなくても精度は十分高いものであることが確認できた。なお、これらのグラフは誤差を検討するためのものなので、経路が見やすくなるように軸の最大・最小値を設定した。

5. 数値解析例

はじめに、1 要素立方体の三軸圧縮・引張り試験のシミュレーションを行い、リターンマッピング・アルゴリズムの性能検証のため、local iteration と global iteration の収束状況を調べる。また、三軸圧縮・引張り時における純粋な構成式の挙動を確認。

次に、境界値問題の適用例として土の三軸圧縮・引張り試験において不均一変形や局所化を伴う問題の解析を行い、収束が難しく、解析困難な状況下でも、この応力積分アルゴリズムが適用可能であることを確認する。

(1) 1 要素立方体の三軸圧縮・引張り試験

1 要素の立方体を対象として、解析を行った。解析モデルは Matsuoka-Nakai モデルと比較対象として Drucker-Prager モデルを用いた。解析に用いたパラメータは、表 2

表-2 材料定数

E	5MPa	a_1	0
ν	0.3	a_2	0kPa^{-1}
P_a	-100kPa	a_3	0
θ_f	30°	σ_1	-100kPa
m	0	σ_2	-100kPa
α	0.5	σ_3	-100kPa

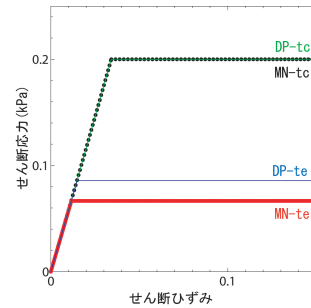


図-4 せん断ひずみ-せん断応力

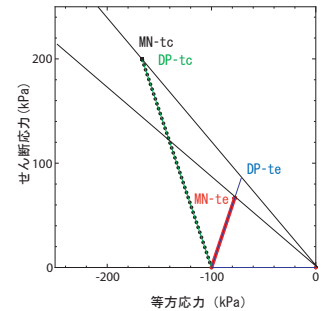


図-5 応力経路

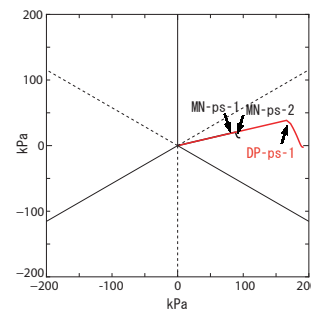


図-6 偏差応力面

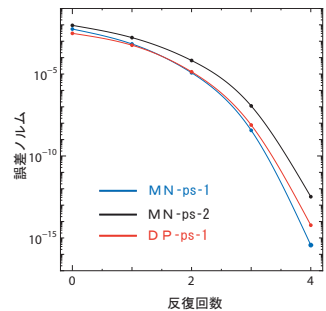


図-7 収束状況

に示す。

図-4 と図-5 より、三軸引張の応力経路では Drucker-Prager モデルに比べ、Matsuoka-Nakai モデルの降伏応力および応力比が低くなっていることが分かる。この結果より、Matsuoka-Nakai モデルは圧縮応力と引張り応力の区別をし、かつ、地盤材料の特性として圧縮に比べ、引張りは低いことをより正確に表現できていることが確認できた。

図-7 は、図-6 において、それぞれの local iteration の収束状況を表している。赤い線は Drucker-Prager モデルを表し、変形後(せん断ひずみ:0.012)を DP-ps-1 とした。図-6 における黒い線は Matsuoka-Nakai モデルを表し、変形前(せん断ひずみ:0.021)を MN-ps-1、変形後(せん断ひずみ:0.025)を MN-ps-2 とした。DP-ps-1 で、良好な 2 次収束が得られることは既知であるが、Matsuoka-Nakai モデルにおいて、特に変形後である MN-ps-2 においても Newton-Raphson 法本来の 2 次収束が得られた。一方、global iteration においては、1 次収束であった。この原因として考えられるのは、3 章で述べた Consistent 接線係数の定式化およびプログラムにわずかな誤りがあったと考えられる。しかし、global iteration の収束は悪いものの、精度に関しては問題がないことも確認できた。

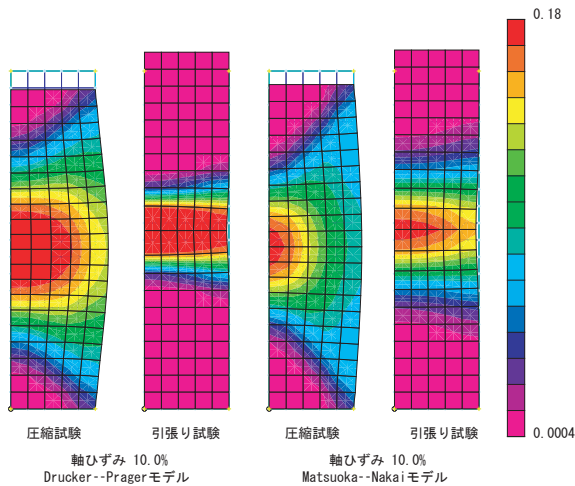


図-8 円柱供試体軸対象解析結果

(2) 土の三軸圧縮・引張り試験

解析モデルは Matsuoka-Nakai モデルと比較対象として Drucker-Prager モデルを用いた。解析に用いたパラメータは、(1) の表 2 とほぼ同じものとする。しかし今回は、ヤング率 $E = 100\text{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.2$ 非関連の度合いを表し係数 $\alpha = 1$ とする。解析モデルの初期形状比は高さ H 、直径を D として $D : H = 1.0 : 2.0$ とする。円柱供試体で 100 個の 2 次元 8 節点アイソパラメトリック二次要素で構成されている。節点数は 351 節点からなる。有限要素モデルの境界条件は、実際の三軸圧縮・引張り試験と同様に載荷、反力側ともに摩擦ありの状態を想定し、反力面は xy 方向に完全固定、側面境界は変位自由、対称軸では x 方向に固定、載荷面には剛な摩擦を再現するために x 方向に固定するとともに y 方向に一樣な変位を与えるものとする。

ここでは、変形挙動および、ひずみ分布について考察する。図 8 に偏差ひずみ分布を示す。コンターは塑性ひずみを表している。変形形状について検討すると、三軸圧縮シミュレーションに関しては、要素試験でよく観察されている高さ方向中央部が膨張する「樽型」の変形が見られ、一方、三軸引張りシミュレーションでも、同様に要素試験でよく観察されている変形である供試体中央部が絞り込まれた「鼓型」の変形を見ることができる。Matsuoka-Nakai モデルと Drucker-Prager モデルをそれぞれ比較してみると、圧縮、引張りともに同じような変形をしており、偏差ひずみの様子もよく似ている。このことから、今回用いた応力積分アルゴリズムを含む有限要素解析は、非常に有効であることが分かる。

ここでは、三軸試験における境界値問題の解から得られた巨視的な力学応答を検討する。図 9 および図 10 に三軸圧縮・引張り試験の解析結果を示す。力学応答としては軸ひずみ ε_a^* ~ 偏差応力 q^* 関係、平均応力 p^* ~ 偏差応力 q^* 関係について求める。各図中において、DP は Drucker-Prager モデルを、MN は Matsuoka-Nakai モデルを、tc は圧縮応力を、te は引張り応力をそれぞれ示している。引張り側の応力経路では Drucker-Prager モデルに比べ、Matsuoka-Nakai モデルの降伏応力および応力比が低くなっていることが分かる。この結果より、地盤材料の特性として圧縮に比べ、引張りは低いことをより正確に表現できていることが確認できた。

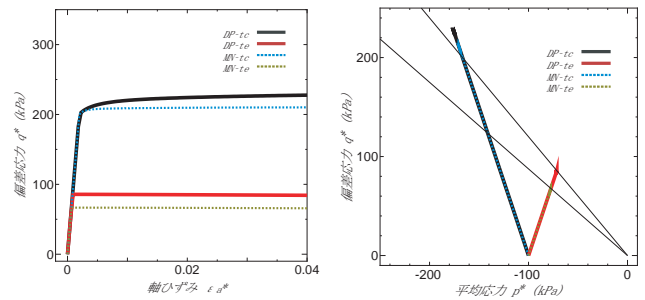


図-9 軸ひずみ～偏差応力関係 図-10 平均応力～偏差応力関係 (マクロ応答)

6. 結論

本研究より得られた主要な知見を以下に列挙する。

1. 第 3 不変量を含む等方硬化型弾塑性構成式モデルに適した応力積分アルゴリズムの定式化を行った。
2. 前述の応力積分アルゴリズム (local iteration) と整合する (consistent な) 接線係数の定式化を行った。
3. 応力積分アルゴリズムの精度を検証し、大きな増分ステップ幅においても高精度であることを確認した。
4. 1 要素立方体の三軸圧縮・引張り試験のシミュレーションを行い、三軸圧縮・引張り時における純粋な構成式の挙動を求めた。また、local iteration の収束性を検証し、Newton-Raphson 法本来の 2 次収束を確認した。
5. 土の三軸圧縮・引張り試験において不均一変形や局所化を伴う状況下でも、この応力積分アルゴリズムが適用可能であることを確認した。また、三軸引張りの応力経路では Drucker-Prager モデルに比べ、Matsuoka-Nakai モデルの降伏応力および応力比が低くなっていることを確認した。この結果より、Matsuoka-Nakai モデルが圧縮応力と引張り応力の区別をし、かつ、地盤材料の特性として圧縮に比べ、引張りは低いことを本研究で提案した応力積分アルゴリズムにおいても正確に表現できていることが確認できた。

参考文献

- 1) Ronaldo I. Borja, Kossi M. Sama and Pablo F. Sanz : On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 192, pp. 1227-1258, 2003.
- 2) Simo, J.C. and Taylor, R.J. : Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.48, pp. 101-118, 1985.
- 3) Meschke, G., Liu, W. N. : A re-formulation of the exponential algorithm for finite strain plasticity in terms of Cauchy stresses, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.173, pp. 167-187, 1999.
- 4) van der Veen, H., Vuijk, K., de Borst, R. : Branch switching techniques for bifurcation in soil deformation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.190, pp. 707-719, 2000.
- 5) Javier Bonet, Richard D. Wood : *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*, Cambridge University Press, 1997.