有限要素法における 2 次元弾性体要素の精度に関する研究

建設構造研究室　渡邊　章吾
指導教官　岩崎　英治
長井　正嗣

1.諸言

有限要素法では構造物を解析する際、部材が非圧縮状態に近くなったり、非常に細長くなると、極度に精度が落ちることがある。これはロッキングと呼ばれる現象である。ロッキングは有限要素のつりあい式となる剛性方程式の剛性を過大評価してしまうことによって生じる精度低下である。このロッキングについても大きく 2 つに分けることができ、一つは部材の非圧縮性によって起こる体積ロッキング、もう一つは、非常に細長い梁を解析した時にせん断ひずみが拘束され発生するせん断ロッキングである。このような精度低下を避けるために低減積分法という積分方法がある。これは、解析の際、剛性行列の積分点よりも一つ少ない積分点で積分する方法である。低減積分法によって、うまく非圧縮による拘束や、せん断ひずみの拘束を回避できるが、このような低減積分を行ったときには、ゼロエネルギーモードと呼ばれるひずみエネルギーに含まれない変形モードを生じることがある。このようなゼロエネルギーモードを含んだ剛性行列は、解が得られなかったり、解が得られても、特異な変形モードが生じたりする。そこで，本研究では、4 節点、8 節点、9 節点四辺形要素において、各要素の変形モード毎のひずみを調べ、ゼロエネルギーモードの数と形状を導く。また、低減積分時における、ゼロエネルギーモードの発生状況を調べる.

2.ロッキングと剛性行列の特異性

2.1 体積ロッキング

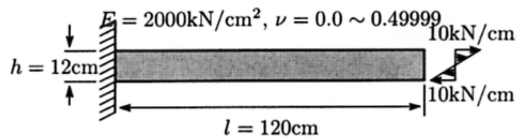
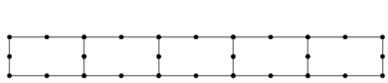


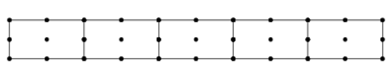
図 1　解析対象とする片持ちはり

最初に、図 1 のような片持ち梁を対象に,非圧縮性によるロッキングを示す。ここでは，4 節点四辺形要素、8 節点四辺形要素、9 節点四辺形要素を使用し、ポアソン比を 0〜0.49999 まで変える。要素分割を図 2 に示す。なお、ヤング係数は $2\times10^3\mathrm{kN/cm^2}$ とした。図 3 にその結果を示す。横軸はポアソン比、縦軸は(計算値/正解)である。

(a) 4 節点四辺形要素



(b) 8 節点四辺形要素



(c) 9 節点四辺形要素

図 2　要素分割

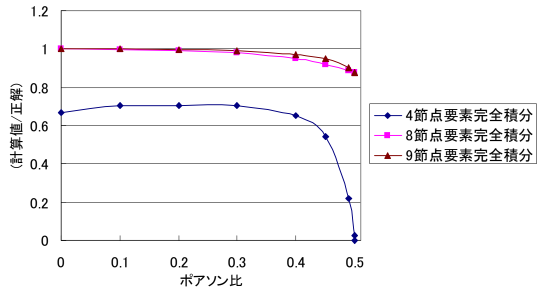


図 3　モーメント荷重が作用した梁のたわみ＜完全積分＞

なお、剛性行列は、Gauss-Legendre の数値積分法を用いて、正確に積分している。また、右端に 5kN の鉛直荷重を作用させたときの結果を図 4 に示す。

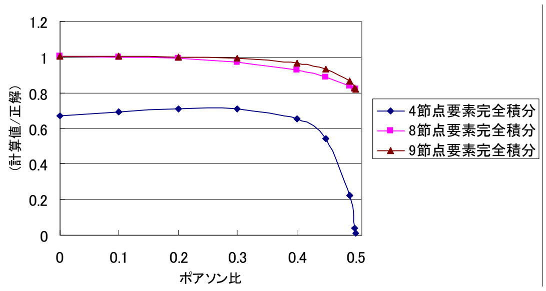


図 4　鉛直荷重が作用した梁のたわみ＜完全積分＞

モーメント荷重、鉛直荷重を作用させたもの、どちらにおいてもポアソン比が、0.5 に近づくほど精度が悪化している。また、4 節点要素の場合は非常に誤差が大きい。

2 次元弾性体のひずみエネルギーは次のような式で与えられる。

$$U=\frac{1}{2}\int_A\left\{(\lambda+G)(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})^2+G(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2+4G\varepsilon_{xy}^2\right\}dA$$

ラメの定数λは、次のように表される。

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

ここで、ポアソン比が 0.5 に近づくということは、ラメの定数λが限りなく大きくなるということにつながる。

これにより、ひずみエネルギーの停留条件に、$(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})=0$ という非圧縮条件が付け加えられることとなり、誤差が生じる。これが体積ロッキングである。

2.2 せん断ロッキング

非常に細長い部材に、2 次元弾性体要素を用いた場合などに、著しく精度が悪化することがある。体積ロッキングの時と同様の片持ち梁において，部材長を 12～1200cm まで変化させてモーメント荷重、及び鉛直荷重を加えたときのたわみを調べてみた。ポアソン比には，0.3 を用いる．結果を図 5,6 に示す。

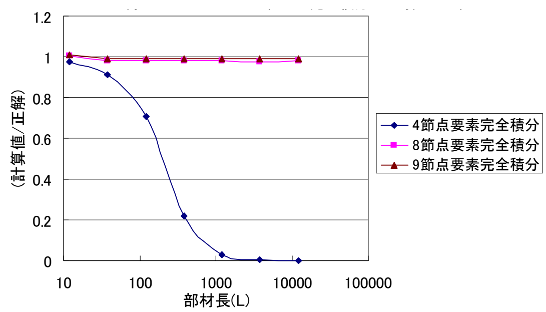


図 5　モーメント荷重を作用した梁のたわみ＜完全積分＞

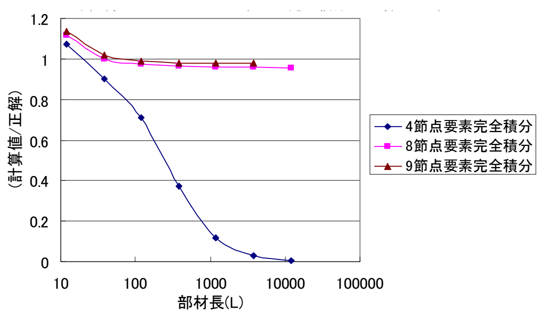


図 6　鉛直荷重を作用した梁のたわみ＜完全積分＞

この場合もまた、4 節点四辺形要素のたわみにおいては、極度の精度低下が起きている.

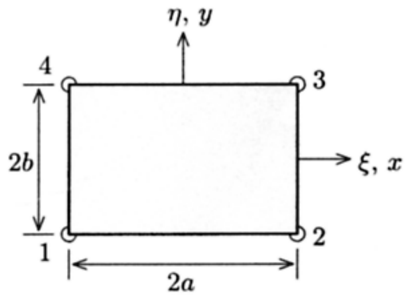


図 7　長方形要素

このような精度低下について、図 7 のような、長方形要素を用いて考察する。x と y 方向の長さが、それぞれ、2a、2b の 4 節点長方形要素のひずみを、陽な形式で表す. このとき、座標(x,y)と向きが一致し，要素中央に原点を持つ−1〜1 の範囲の値をとる正規座標(ξ,η)を導入する。

ここで、各節点の x 及び y 方向変位 u,v は、ベクトル表示で表すと、正規座標ξ,ηから、次のようにして求められる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}\boldsymbol{U}_0 + \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{U}_2 + \mathbf{h}\boldsymbol{U}_3$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{V}_2 + \mathbf{h}\boldsymbol{V}_3$$

また、これらのU_i,V_i(I=0,1,2,3)は、変形量(剛体回転を含む)を表している。これらの諸量に対応するモードを図 8 に示す。

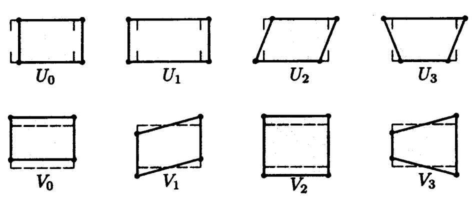


図 8　剛体モードと変形モード

2 次元弾性体要素のひずみ式は次のように表される。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{U_1}{a} + \eta\frac{U_3}{a} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{V_2}{b} + \xi\frac{V_3}{b}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{U_2}{b} + \frac{V_1}{a} + \xi\frac{U_3}{b} + \eta\frac{V_3}{a}$$

ここで、2 次元の細長い部材ではせん断ひずみがゼロという拘束条件

$$2\varepsilon_{xy} \cong 0$$

が課され、この条件により発生可能なひずみは

$$\varepsilon_{xx} = \frac{U_1}{a} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{V_2}{b}$$

のみとなる。図 8 の変形モードより、U_1,V_2は、部材の伸縮、U_3,V_3は、曲げ変形を表していることが分かる。上式により、梁のような細長い部材を，長方形断面要素を用いて解析する場合には、部材の伸縮変形は、可能であるが、曲げ変形が拘束され、支持条件や、荷重条件によっては、精度が非常に悪くなることがある。これが、せん断ロッキングの原因である。

2.3 低減積分法

低減積分法とは、剛性行列を求める際に,全てのひずみ成分について、1 点少ない積分点数を用いて積分を行うことである。一方，選択的低減積分は、非圧縮やせん断ひずみがゼロとなるような拘束の課せられるひずみ成分だけを低減積分し、残りの項は、正確な積分を行う方法である。せん断ロッキングが起こる問題では、せん断ひずみのみ低減積分し、体積ロッキングが起こる問題では、体積ひずみのみ低減積分する。先の計算例と同じ片持ち梁に，低減積分法と選択的低減積分法を用いた結果を、図 9〜16 に示す。

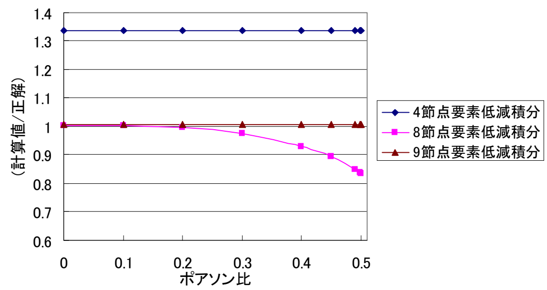


図 9　モーメント荷重作用

(体積ロッキング問題)＜低減積分＞

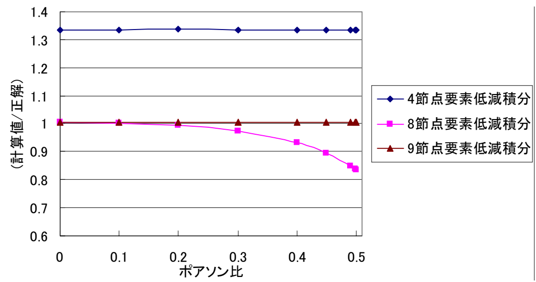


図 10　鉛直荷重作用

(体積ロッキング問題)＜低減積分＞

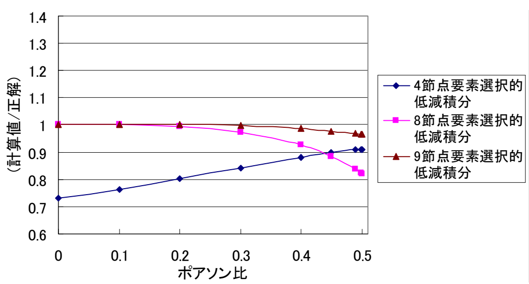


図 11　モーメント荷重作用

(体積ロッキング問題)＜選択的低減積分＞

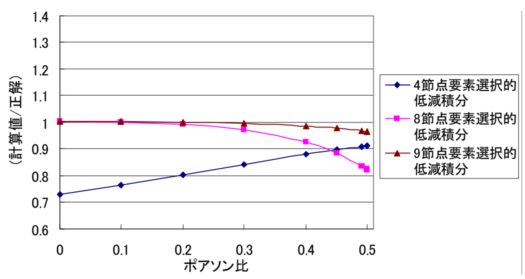


図 12　鉛直荷重作用

(体積ロッキング問題)＜選択的低減積分＞

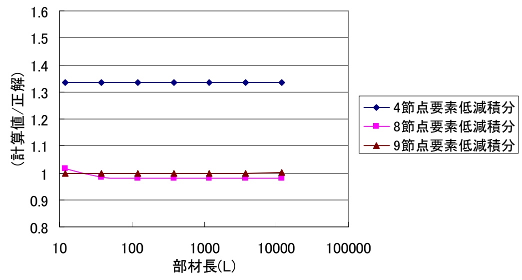


図 13　モーメント荷重作用

(せん断ロッキング問題)＜低減積分＞

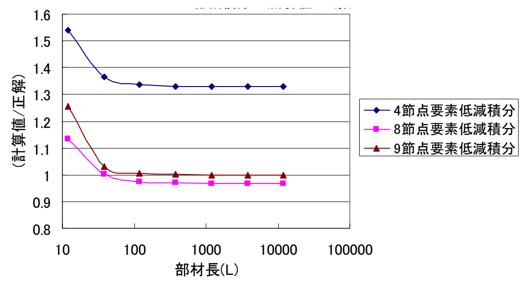


図 14　鉛直荷重作用

(せん断ロッキング問題)＜低減積分＞

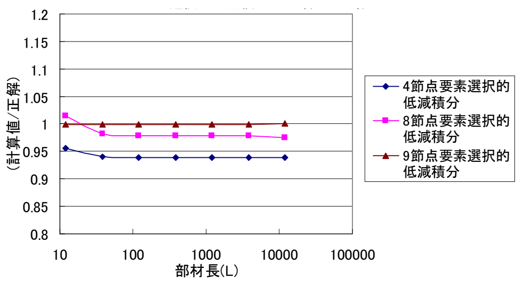


図 15　モーメント荷重作用

(せん断ロッキング問題)<選択的低減積分>

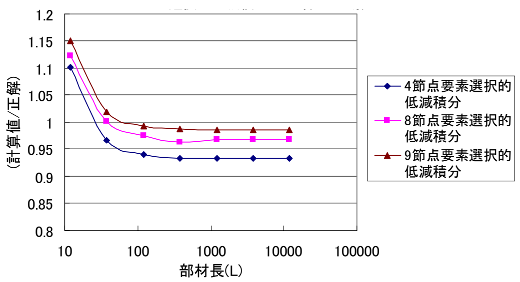


図 16　鉛直荷重作用

(せん断ロッキング問題)<選択的低減積分>

2.4 ゼロエネルギーモード

先の結果のように低減積分法、選択的低減積分法共に、完全積分の時に見られたような極度の精度低下は見られない。しかし、低減積分法においては、ひずみエネルギーに含まれない変形モード(ゼロエネルギーモード)が剛性行列に含まれている．このような剛性行列は、支持条件や荷重条件によっては解が得られない場合があり，また，解が得られても、通常では起こりえない変形状態が表れることがある。それぞれの要素のゼロエネルギーモードは図 17 のようになる。この低減積分時のゼロエネルギーモードの数と形は，各要素について、ひずみを変形することにより、理論的に導き出すことが出来る。ここでは，4 節点四辺形要素のゼロエネルギーモードを具体的に示す. 変形モードは図 18 のようになる。また、それぞれのモード毎の節点変位とひずみの関係は、表 1 のようになる.

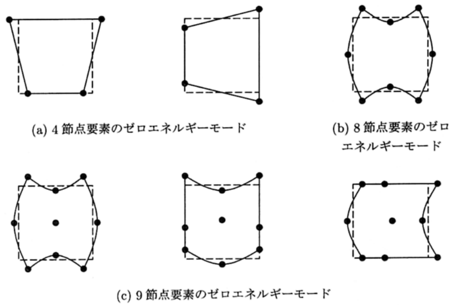


図 17　ゼロエネルギーモード

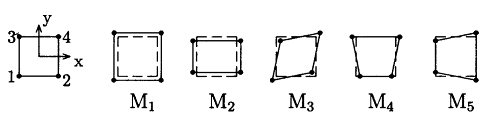


図 18　4 節点四辺形要素の変形モード

要素内のひずみ $\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}$, $\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}$, $2\varepsilon_{xy}$ は、節点変位から次のように表される.

$$\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}=D_1+xD_5+yD_4$$

$$\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}=D_2+xD_5+yD_4$$

$$2\varepsilon_{xy}=D_3+xD_4+yD_5$$

これらの D_i は、要素内の変位式

$$u=N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3+N_4u_4=C_1+C_2x+C_3y+C_4xy$$

$$v=N_1v_1+N_2v_2+N_3v_3+N_4v_4=F_1+F_2x+F_3y+F_4xy$$

から得られる。

低減積分時は 4 節点四辺形要素の積分点は、x=y=0 なので、M_4 と M_5 のひずみはゼロとなり、ひずみエネルギーに含まれないことになる。よって、これらのモードはゼロエネルギーモードとなる。8 節点、9 節点四辺形要素においても同様に調べると図 17 のようなゼロエネルギーモードが発生していることが分かる。

表 1　4 節点四辺形要素の
節点変位に対するひずみ

	節点変位								ひずみ		
モード	U_1	U_2	u_3	U_4	V_1	V_2	V_3	v_4	$\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}$	$\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}$	$2\varepsilon_{xy}$
M_1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	4	0	0
M_2	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	0	4	0
M_3	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	0	0	4
M_4	1	-1	-1	1	0	0	0	0	2y	2y	2x
M_5	0	0	0	0	0	-1	-1	1	2x	−2x	2y

また、極端に短い梁に低減積分法を適用すると大きな誤差を生む場合がある。4 節点四辺形要素の部材長が L=25.9 の時の変形状態を図 19、また、剛性行列の最小固有値に対応する固有ベクトルを図 20 に示す.

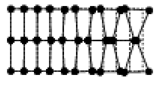


図 19　4 節点要素の変形モード(L=25.9)

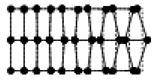


図 20　4 節点要素の固有ベクトル(L=29.7)

これより，先に述べたゼロエネルギーモードが発生していることは明らかである。図21に4節点四辺形要素の部材長を変えたときの剛性行列の固有値を示す。

このように、部材長が短いときに，固有ベクトルにゼロエネルギーモードを含んだ固有値が，梁の変形モードを表す固有値より小さくなり，本来は，発生しないはずの変形が顕在化することが分かる。このような現象は、9 節点四辺形要素においても見られた。

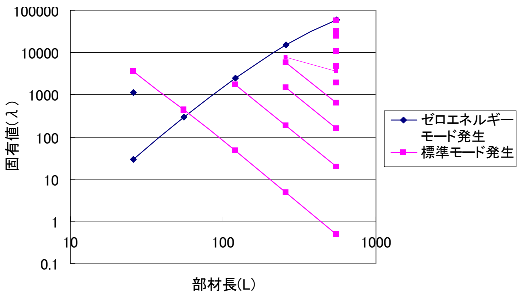


図 21　部材長に対する固有値
(4 節点四辺形要素)

3. 結論

本研究では、陽な形での式の変形により，ゼロエネルギーモードの数と形状を導くことが出来た。

また，極めて短い梁において低減積分法を用いると，特異な変形状態が現れ，大きな誤差を生じる場合があるということが分かった。

4. 参考文献

(1) N.Bic'anic' and E.Hinton：Spurious Modes in Two-Dimensional Isoparametric Elements, *Int. j. numer, methods engng.*, Vol14, pp1545-1557, 1979.

(2)G.Prathap and G.R.Bhashyam Reduced Integration and The Shear-Flexible Beam Element, *Int .j .numer, methods engng.*, Vol.18, pp195-210, 1982.

(3) 土木学会構造工学委員会　計算力学とその応用に関する研究小委員会：構造工学シリーズ 7 構造工学における計算力学の基礎と応用，土木学会, 1996.