

# 配置依存性のある境界条件を含む 有限変形問題の非線形解析

建設設計工学研究室  
指導教官

上窪 章也  
鳥居 邦夫

## 1. はじめに

本研究では、有限変形問題の定式化における諸問題のうち、特に外力境界条件の設定に関する研究を行う。外力境界条件とは、物体力や表面力、あるいは境界値問題を速度形式で定式化する場合にはそれらの速度を規定する境界条件である。ここでは、境界の変形に伴い大きさおよび方向が逐次変化する圧力影響を考慮した非線形解析手法の定式化を行った。本研究では特に地盤材料の変形問題のうち、圧力の影響が顕著な三軸試験を取り上げる。

三軸圧縮・伸張試験などの地盤材料の要素試験では、理想的な試験結果を得るためには一様変形が持続することが前提とされる。しかし実際には、境界での摩擦の影響や、分岐現象により、理想的な一様変形を実現することは困難であり、変形の局所化やせん断帯の形成などといった不均一変形が発生し、試験結果はそれらの影響を受けていると考えられる。そこで本研究では、要素試験から得られる土質定数の不可避的な不均一変形影響を調べるため、要素試験を境界値問題として取り扱い、実際の実験を模した境界条件を設定した数値解析を行う。その結果から巨視的な限界応力比を求め、マクロ、ミクロ的観点から見た降伏面形状について言及する。

## 2. 配置依存性を考慮した非線形解析の定式化

配置依存性のある境界条件を含む弾塑性境界値問題の定式化についてまとめる。まず、開集合の領域  $B \subset \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$  ( $n_{\text{dim}} = 1, 2, 3$ ) を考える。  $B$  は物体の参照配置を表し、  $n_{\text{dim}}$  は領域の次元であり、  $\mathcal{R}$  は実数の空間である。このとき、空間表示の弱形式のつり合い方程式は、

$$g_{\varphi_t}(\boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\eta}) := \int_{\varphi_t(B)} \boldsymbol{\tau} : (\boldsymbol{\eta} \otimes \nabla_{\boldsymbol{x}_t}) \frac{dv}{J} - \int_{\varphi_t(\partial_t B)} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, ds = 0 \quad (1)$$

と与えられる。ここで、  $\varphi(B)$  は変形写像、  $J = \det \boldsymbol{F}$  は体積増加率、  $\boldsymbol{\tau}$  は kirchhoff 応力、  $\rho_0$  は質量密度、  $B$  は物体力、  $\bar{\boldsymbol{t}}$  は表面力、  $\partial_t B$  は外力境界、  $\boldsymbol{\eta}$  は斉次境界条件を満たす可容変分である。つり

合い式 (1) は変位に関して非線形であるため、有限の大きさを持つ増分変位  $\Delta \boldsymbol{u}$  について線形化すると、

$$g_{\varphi_t}(\boldsymbol{\tau}_t; \boldsymbol{\eta}) + \left. \frac{d}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} g_{\varphi_{t+\zeta}}(\boldsymbol{\tau}_{t+\zeta}; \boldsymbol{\eta}, \Delta \boldsymbol{u}) = 0 \quad (2)$$

となる。ここで、左辺の  $g_{\varphi_t}(\boldsymbol{\tau}_t; \boldsymbol{\eta}) \neq 0$  は不釣り合い力(残差力)に相当する。従って、式 (2) の反復解法を行い、  $g_{\varphi_t} = 0$  となるつり合い状態の解を求めることとなる。

ここでは、内力項に関しては既知であるものとして、式 (1) 第 2 項の配置依存性のある外力項の線形化を行う。

外力として物体表面に対して常に法線方向に作用する圧力荷重  $\bar{\boldsymbol{t}} = p \mathbf{n}$  を想定する。外力境界上に自然座標を定義すると、法線ベクトル及び面要素は

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \gamma(\varphi_t)}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \gamma(\varphi_t)}{\partial \xi_2}}{\left| \frac{\partial \gamma(\varphi_t)}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \gamma(\varphi_t)}{\partial \xi_2} \right|} \quad (3)$$

$$da = \left| \frac{\partial \gamma(\varphi_t)}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \gamma(\varphi_t)}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 \quad (4)$$

となる。ここで、  $\varphi_t = \varphi_t(X)$  は現配置上の一点を表し、  $\gamma$  は全体座標から自然座標への変換関数である。式 (1) 右辺第三項を自然座標表記で表すと、

$$\int_{\varphi_t(\partial_t B)} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, ds = \int_{A_\xi} p \mathbf{n} \cdot \left( \frac{\partial \gamma(\varphi_t)}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \gamma(\varphi_t)}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5)$$

これを増分変位  $\Delta \boldsymbol{u}$  について線形化すると、線形化された外力項は

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} \int_{\partial_t B} p \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \, ds \\ &= p \int_{A_\xi} \frac{\partial \gamma(\varphi_t)}{\partial \xi_2} \cdot \left( \frac{\partial \gamma(\Delta \boldsymbol{u})}{\partial \xi_1} \times \boldsymbol{\eta} \right) \\ & \quad - \frac{\partial \gamma(\varphi_t)}{\partial \xi_1} \cdot \left( \frac{\partial \gamma(\Delta \boldsymbol{u})}{\partial \xi_2} \times \boldsymbol{\eta} \right) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

と表すことができる。

### 3. 有限変形 Cam-clay モデル

本研究では，等方弾塑性体の構成モデルとして，修正 Cam-clay モデルを用いた．この構成モデルは，以下の (1) ~ (6) に基づくものである．

(1) 変形勾配の乗算分解

$$F = F^e \cdot F^p \quad (6)$$

(2) 圧密式

$$v(p) = v_0 \left( \frac{p}{p_{c0}} \right)^{-\tilde{\lambda}} \quad (7)$$

(3) 限界状態

$$q = Mp \quad (8)$$

(4) 降伏関数

$$f(p, q, p_c) = \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) \leq 0 \quad (9)$$

(5) 関連流れ側

$$d^p = \frac{\tilde{\lambda}}{J} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (10)$$

(6) ひずみ硬化側

$$p_c = p_{c0} \exp \left[ \frac{-\varepsilon_v^p}{\tilde{\lambda} - (1 - \tilde{\lambda}) \tilde{\kappa}^*} \right] \quad (11)$$

### 4. 土の三軸圧縮・伸張シミュレーション

配置依存性のある境界値問題として土の三軸圧縮・伸張試験をシミュレートする．構成モデルとして修正 Cam-clay モデルを用いて，三軸試験を一つの境界値問題として考えた有限要素解析を行った．ここでは，せん断帯の形成，変形の局所化に起因する不均一変形の影響を調べた．

(1) 材料定数

材料定数として，せん断弾性係数  $G = 5.4 \times 10^3$  (kPa)，膨潤指数  $\kappa = 2.5 \times 10^{-3}$ ，圧縮指数  $\lambda = 1.4 \times 10^{-2}$ ，初期等方応力  $p_0 = 50, 100, 200, 400$  (kPa) の 4 種類，比体積は各初期等方応力に応じて順に  $v_0 = 1.868, 1.850, 1.832, 1.814$ ，限界応力比  $M = 1.05$  を用いた．

(2) 解析モデルと境界条件

解析に使用した有限要素モデルを図-1 に示す．幅  $W$ ，高さ  $H$ ，奥行き  $L$  の角柱及び円柱供試体の上端に一樣な  $z$  方向の変位が与えられるものとする．拘束条件については，実際の実験を反映し上下端面共に摩擦境界とした．供試体形状比は  $W : L : H = 1.0 : 1.0 : 2.0$  とした．

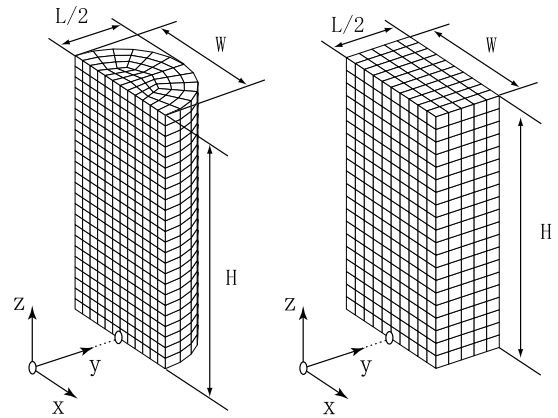


図-1 有限要素解析モデル

(3) 解析結果

a) 変形挙動及びひずみ分布

図-2，図-3 に軸ひずみが 15 % に達したときのせん断ひずみ分布及び体積ひずみ分布を示す．

三軸圧縮に関して，まず偏差ひずみの分布を見ると供試体中心部での偏差ひずみの集中が支配的となっており，明確なせん断帯形成は見られなかった．

一方，三軸伸張においては，高さ方向中央部において偏差ひずみの集中が起こり変形の局所化が進展しており，体積ひずみ分布を見てもせん断ひずみが卓越する領域で体積ひずみが集中していることからタイレイタンスによる体積膨張が見られる．

変形形状については，三軸圧縮では「樽型」，三軸伸張では「鼓型」の変形が見られ，実試験においてもよく観察される変形であった．

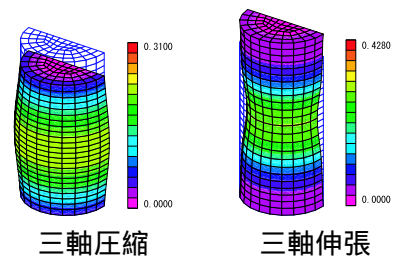


図-2 せん断ひずみ分布 (円柱)

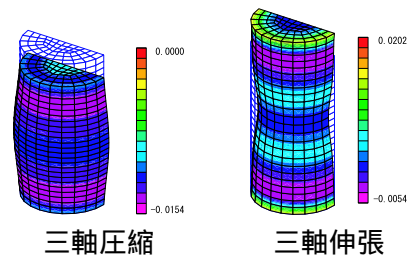


図-3 体積ひずみ分布 (円柱)

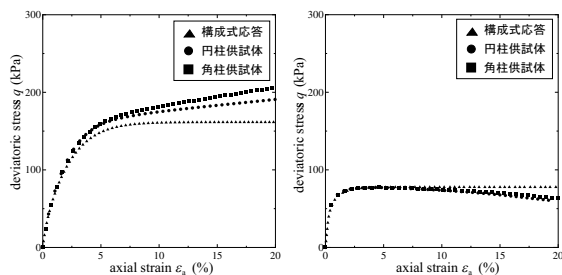
b) マスとしての力学応答

図-4, 図-5 に巨視的力学応答を示す．理想的な一様変形を仮定した構成式応答を併せて各図中に示す．

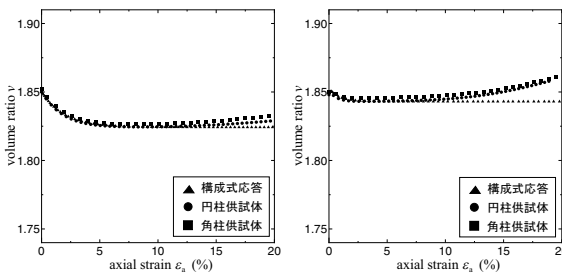
三軸圧縮試験の力学応答を見ると，偏差応力  $q \sim$  軸ひずみ  $\varepsilon_a$  関係より軸ひずみの増加に対し偏差応力は緩やかに増大している．これは，前述の偏差ひずみ分布において供試体中央部で偏差応力の集中が起きているにも関わらずせん断帯が形成されていないためであると考えられる．

一方，三軸伸張試験の力学応答を見ると，比体積  $v \sim$  軸ひずみ関係  $\varepsilon_a$  において早い段階で体積膨張に転じる傾向があり，それに対応して偏差応力  $q \sim$  軸ひずみ  $\varepsilon_a$  関係では，軸ひずみの増加に対しピークに達してから徐々に偏差応力が減少している．これは前述のひずみ分布を見てわかるように，応力の集中によりせん断帯が形成され，ダイレイタシーによる体積膨張から軟化しているためである．

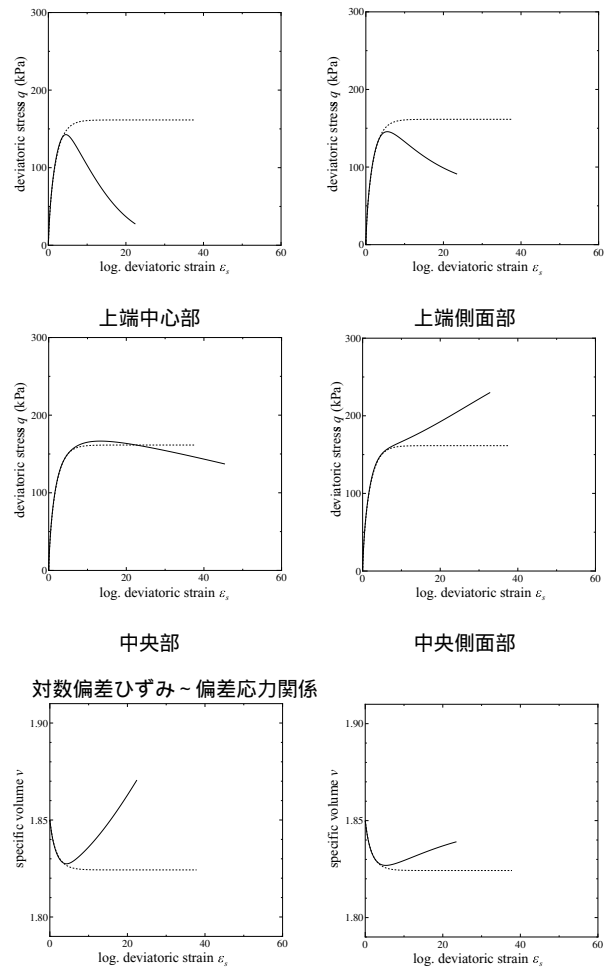
供試体形状の違いが及ぼす影響を考察すると，角柱供試体では上記の硬化・軟化傾向がより顕著であり，円柱供試体の方が理想体の構成式応答に近い結果となった．この結果は，角柱供試体のほうが円柱供試体よりも不均一変形の影響が大きいということを示している．



三軸圧縮 三軸伸張  
図-4 軸ひずみ-偏差応力関係



三軸圧縮 三軸伸張  
図-5 軸ひずみ-比体積力関係



上端中心部 上端側面部  
中央部 中央側面部  
対数偏差ひずみ～偏差応力関係  
specific volume v  
log. deviatoric strain  $\varepsilon_s$   
上端中心部 上端側面部  
中央部 中央側面部  
対数偏差ひずみ～比体積関係

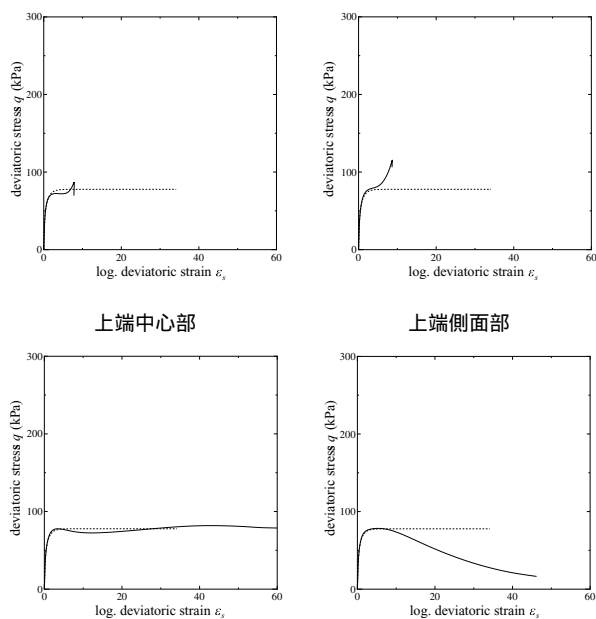
図-6 局所応答 (三軸圧縮)

c) 局所的な力学応答

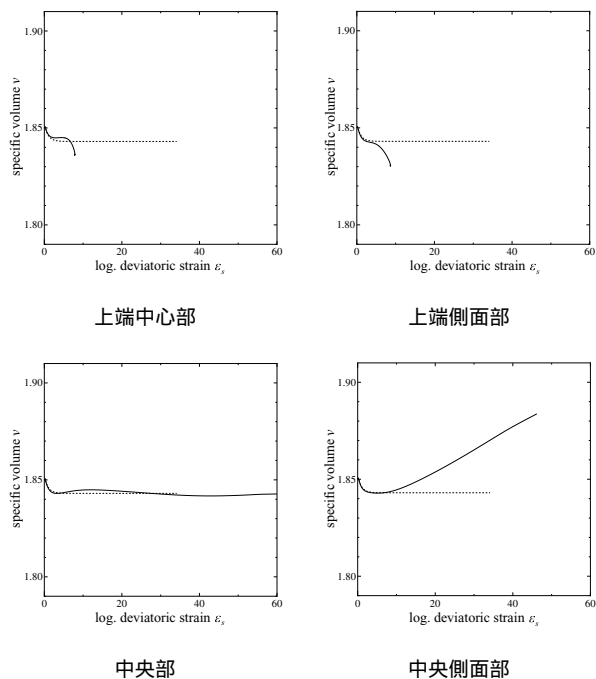
図-6, 図-7 に，それぞれ三軸圧縮・伸張試験における局所要素の力学応答を示す．

三軸圧縮の場合，供試体中央部では各図において構成式応答とほぼ同様な応力経路を進んでいるものの偏差ひずみの進展は他の要素と比べ最も卓越している．一方，供試体上端部及び側面部付近では，体積膨張に伴い軟化していることが観察された．

三軸伸張の場合，供試体中央部では偏差ひずみ



対数偏差ひずみ～偏差応力関係



対数偏差ひずみ～比体積関係

図-7 局所応答 (三軸伸張)

が卓越しているのに、供試体上端部付近では、偏差ひずみの進展がほとんど見られなかった。これは、供試体中央部において偏差ひずみの集中に伴い変形の局所化が生じ、供試体上下端部において除荷域が進展しているためである。

また、変形の局所化が進展しているため、三軸圧縮の場合では側面部が体積膨張し、三軸伸張の場合では側面部が体積圧縮されている。

#### (4) 巨視的限界応力比について

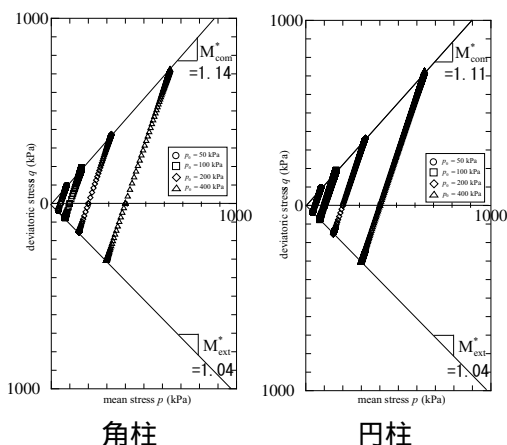


図-8 平均応力-偏差応力関係

図-8 に平均応力-偏差応力関係を示す。構成モデル本来の限界応力比は圧縮・伸張側において区別なく  $M = 1.05$  であるのに対し、図-8 の数値実験により求めた巨視的限界応力比では圧縮側でより大きく、伸張側でより小さくなる傾向が得られた。また、巨視的限界応力比を圧縮側と伸張側で比較すると、圧縮側のほうが伸張側よりも 10% 程度大きいことが確認された。さらに、供試体形状について比較すると、円柱供試体の方が角柱供試体と比べて理想値に近い傾向が得られた。構成式と数値実験での限界応力比の違いを言い換えると、構成式の降伏面は、微視的には圧縮・伸張に差がなくとも巨視的にみればその形状は異なり圧縮側に強く、伸張側に弱くなっている。

#### 5. まとめ

本研究では、土の三軸圧縮・伸張試験を想定した数値実験を行い、供試体内の不均一影響を調べた。その結果、三軸状態 ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) に関していえば、構成モデルとして降伏関数に応力の第 3 不変量を含まず、圧縮・伸張側で区別のない Cam-clay モデルを用いたのにもかかわらず、供試体の巨視的応答は Mohr-Coulomb 型、あるいは Matsuoka-Nakai 型の破壊基準のように圧縮側の方が伸張側よりも大きな限界応力比が得られた。

#### 参考文献

- 1) Borja, R. I., Sama, K. M. and Sanz, P. F.: On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, pp. 1227-1258, 2003.
- 2) 中井 照夫, 檜尾 正也, 荒巻 景介: 粘性土の変形局所化メカニズムに関する解析的検討, *応用力学論文集*, Vol. 5, pp. 339-348, 2002.