

# 骨組構造の幾何学的非線形解析の精度と収束性に関する研究

建設構造研究室 鈴木 雅久

指導教官 岩崎 英治

長井 正嗣

## 1. 序論

梁や柱などの細長い部材で構成される骨組構造は、部材内に生じるひずみは微小でも有限の大きさの変位を生じることがある。このような構造の変位や断面力を正確に計算するには、幾何学的な形状変化による影響を考慮した解析を行う必要がある。このような解析は、幾何学的非線形解析となるため、平衡方程式を安定に解くために、最終的な平衡状態までを複数の増分ステップに分割して、増分ステップごとに平衡状態を求める方法が用いられる。また、部材の変位を、初期状態での部材の座標系をもとに記述した全ラグランジュの方法と直前の増分ステップでの部材の座標系をもとに記述した更新ラグランジュの方法がある。さらに、変位は有限でもひずみを微小として扱えることに、着目して非線形項を省略する等の定式化の工夫により、種々の方法が考案されている。これらの方法には、それぞれ、定式化の簡易さや、精度、収束性などに違いがある。しかし、非線形解析結果の精度や収束性は、非線形解析の収束条件や数値計算上の細部のパラメータの扱い方により異なってくるために、幾何学的非線形解析の手法による精度や収束性の検討を行うときは、できる限り同じ条件にする。

本研究では、骨組構造の幾何学的非線形解析に用いられる幾つかの代表的な解析手法に基づいた定式化を行い、同一プログラムにより、定式化の差異以外は、同じ条件下での数値計算により、それぞれの手法の精度と収束性について検討を行う。

## 2. 部材の定式化

図 2.1 に示しているような  $\Omega^{(0)}$  の状態（初期状態）の部材  $A^{(0)}B^{(0)}$  が、 $\Omega^{(N)}$  の状態では  $A^{(N)}B^{(N)}$  にあり、この状態での部材の変位やひずみ、応力などは既知であるとする。この状態の部材に荷重増分が作用したときの次の平衡状態  $\Omega^{(N+1)}$  の状態を求める。増分理論には、 $\Omega^{(0)}$  の状態の座標系を基準にして、 $\Omega^{(N+1)}$  の状態を求める全 Lagrange の手法と、 $\Omega^{(N)}$  の状態の座標系を基準にして、 $\Omega^{(N+1)}$  の状態を求める更新 Lagrange の手法がある。

棒のように細長い部材は、一般に、その長手方向に直交する面内の変形は小さく、工学的には無視できる。このため、断面は変形しないという「断面剛の仮定」あるいは「平面保持の仮定」と呼ばれる仮定に基づいて、その変形を考えることができる。

### 2.1 更新 Lagrange の手法での平衡方程式

更新 Lagrange の手法では、平衡方程式は次のようになる。

$$(k_L + k_G)\Delta d = \Delta p + (p - f) \quad (1)$$

上式中の  $k_L$  は線形剛性行列、 $k_G$  は幾何剛性行列、 $f$  は  $\Omega^{(N)}$  の状態の部材に生じている断面力からなるベクトルであり、 $p$  はその状態の部材に作用している荷重ベクトルを表している。 $\Omega^{(N)}$  の状態が平衡状態にあれば、 $f = p$  の関係が成立している。しかし、この平衡方程式は、増分量に関して線形化しているために、厳密には平衡状態にならないので、 $f \neq p$  である。そこで、これらのベクトルが等しくなるような収束計算のプロセスが必要になる。更新 Lagrange の方法では、幾何剛性行列の誘導の際に軸力と曲げモーメントはそれぞれ、部材軸の座標に関して一定値と、1 次式で

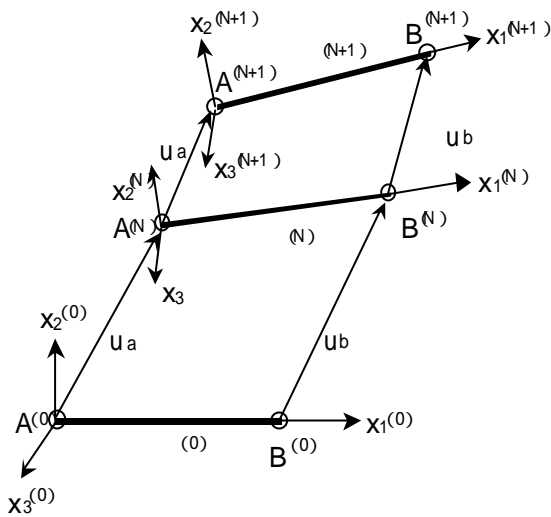


図2.1 各増分段階での部材の状態

表されるとしている．幾何学的非線形問題では，一般に部材軸の座標に関して，軸力と曲げモーメントは高次式で表される．しかし，断面力を線形解析の場合に表されるような低次の式で表したほうが，平衡状態を計算するときの反復計算回数が少なくなり，収束性の向上が見られるため，幾何学的非線形問題でも，線形問題と同じように軸力を一定，曲げモーメントを1次式であらわしている．

### 2.2 全 Lagrange の手法での平衡方程式

全 Lagrange の手法では，平衡方程式は次のようになる．

$$(k_L + k_G + k_D)\Delta d = \Delta p + (p - f) \quad (2)$$

上式中の  $k_D$  は，初期変位剛性行列を表している．

全 Lagrange の手法では，幾何剛性行列  $k_G$  の定式化の違いにより二つに分けられる．一つ目は，断面力と曲げモーメントをそれぞれの部材軸の座標に関して一定値と1次式で表し，二つ目は，断面力と曲げモーメントを変位により表している．全 Lagrange の方法では，常に初期の座標系を基準にしているため，変位により断面力と曲げモーメントを表すことが出来る．

ところで， $\Omega^{(0)}$  の状態の部材  $A^{(0)}B^{(0)}$  から  $\Omega^{(N)}$  の状態の部材  $A^{(N)}B^{(N)}$  までの変位は，部材の変形に寄与する成分と剛体的な移動の成分か

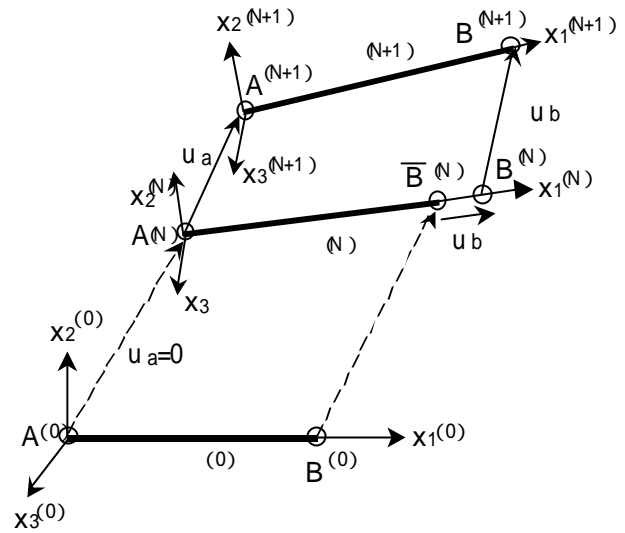


図2.2 剛体変位除去の手法での部材の状態

らなる．この剛体変位成分は，ひずみや応力に関係しないので，図 2.2 のように， $\Omega^{(0)}$  の状態の部材が  $A^{(N)}\bar{B}^{(N)}$  の位置にあったものと考えることができる．このように扱うと，変位成分が小さくなるので，高次の非線形項まで用いなくても，ひずみや応力を精度よく表現できる．また，剛性行列  $k_G$ ， $k_D$  の要素内の式が簡略される．

## 3. 数値計算例

### 3.1 トラス部材

図 3.1 のようなトラス部材について数値計算を行った． $h/b$  を 0.2 または 1.0 として，荷重を節点 2 に載荷したときの変位について更新または全 Lagrange の方法を用いて数値計算を行い，また，増分量を変えることで得られる解の精度について検討をする．

図 3.2 で示されている initial configuration は変形前の部材を基準に定義したひずみより求められる解析解，deformed configuration は，変形後の部材を基準としたひずみより求められる解析解である． $h/b = 0.2$  のように小さなひずみを生じる場合には，二つの解析解が一致している．つぎに更新 Lagrange の方法と全 Lagrange の方法の増分量を変化させたときに得られた数値解について検討を行う．図 3.2 を見て分かるように，増分量を大きくしたときの数値解と小さくした

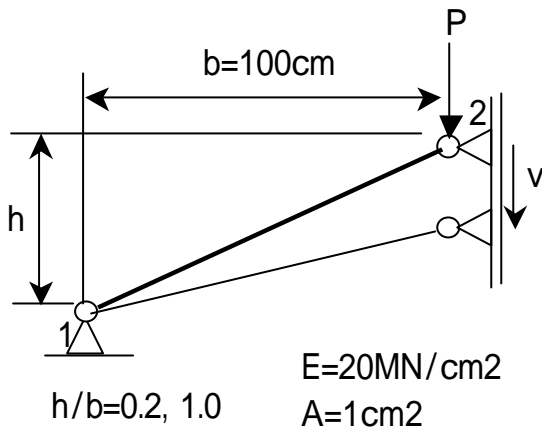


図3.1 トラス部材

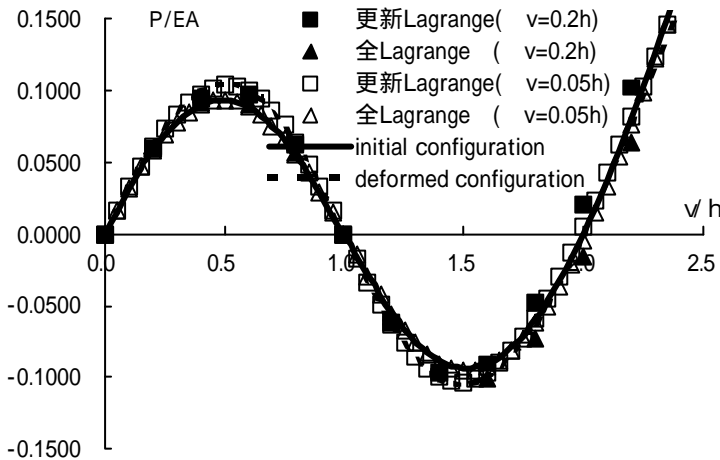


図3.3 トラス部材 (h/b=1.0のとき)

ときの数値解に違いは見られず、また、解析解とも一致している。

次に  $h/b = 1.0$  のときの結果は、図 3.3 のようになる。  $h/b = 1.0$  のように大きなひずみを生じる場合には、二つの解析解に差が生じてくる。これは、定式化の基準とする座標系に違いが現れているためである。増分を大きくとった場合について各手法の数値解を見てみると、更新 Lagrange の方法は、変形後の部材を基準とした解析解 (deformed configuration) に近づき、全 Lagrange の方法は、変形前の部材を基準とした解析解 (initial configuration) に近づいている。しかし、増分量が大きいと各手法とも数値解に大きな誤差が含まれている。次に、増分を小さくすると各手法ともそれぞれの解析解に、より近い数値解が得られる。このことから、増分を小さくすることで、精度のよい数値解が得られること

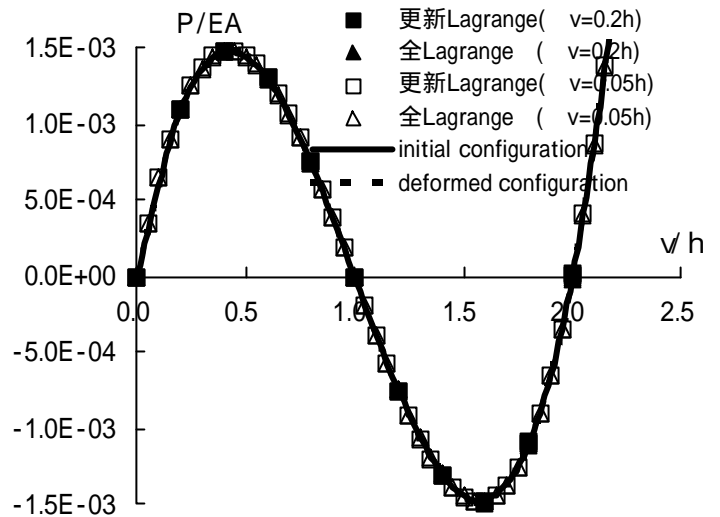


図3.2 トラス部材 (h/b=0.2のとき)

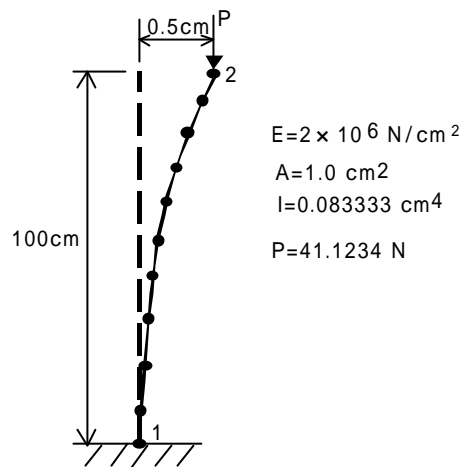


図 3.4 平面部材 (2次元梁)

が分かる。

### 3.2 平面骨組 (2次元梁)

二つ目の数値計算例として図 3.4 のような平面骨組を用いた。更新 Lagrange の方法(ebeam)、全 Lagrange の方法(ebeam\_tl, ebeam\_tld)の三種類について数値解析を行う。ebeam\_tl は、断面力と曲げモーメントをそれぞれの座標軸に関して一定値と 1 次式で表し、ebeam\_tld は断面力と曲げモーメントを変位で表している。

図 3.5 より、更新 Lagrange の方法(ebeam)と全 Lagrange の方法(ebeam\_tl)は、変位が小さい場合も大きい場合も数値解に違いは表れない。しかし、全 Lagrange の方法の ebeam\_tld だけ、数値計算が途中までしかされていない。今回の数値計算において、反復計算回数の打ち切り回数を 10

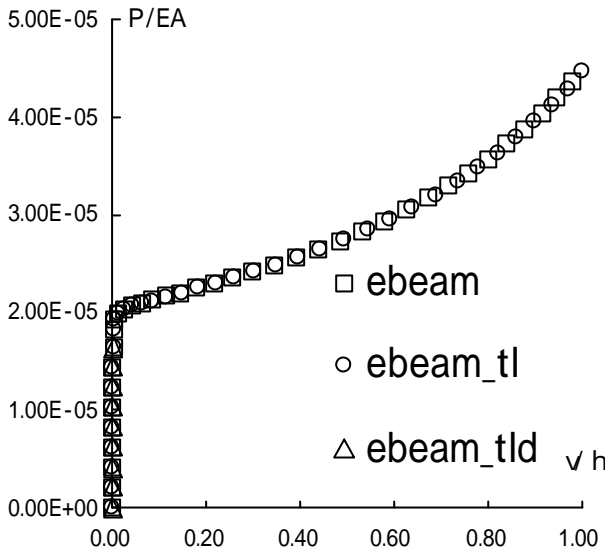


図3.5 平面部材 (  $v=0.1$  のとき )

回としている．そのため，ebeam\_tld は，打ち切り回数までに解が収束しなかったため，計算が打ち切られている．

図 3.6 は，各手法での増分ステップの増加と反復計算回数を表したものである．更新 Lagrange の方法の ebeam は変位が大きい場合でも少ない計算回数で収束していることが分かる．全 Lagrange の方法の ebeam\_tl は変位が大きくなるに従い，増分ステップの増加と共に反復計算回数も増加している．最後に，ebeam\_tld は，変位が小さく，増分ステップが少なくても，反復計算回数が大きくなり，やがて規定回数内に解が収束しなくなり，計算が打ち切られている．

#### 4. 結論

本研究で行った数値計算より，以下のことが明らかになった．

- ・ 増分量の大きさについて  
増分量が大きいと数値解に多くの誤差が含まれるが 増分量を小さくすることにより精度のよい解が得られる．
- ・ 解の違いについて  
大きなひずみの生じる場合には，更新 Lagrange の方法と全 Lagrange の方法による収束値は異なる．
- ・ 更新 Lagrange の方法は，少ない反復回数

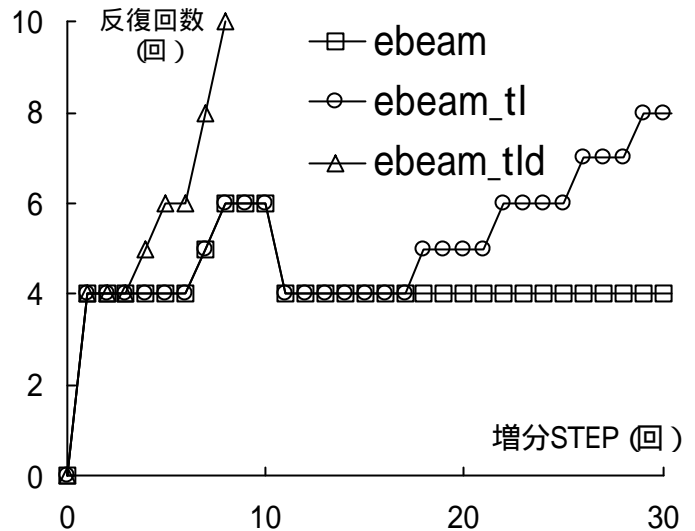


図3.6 平面部材 (  $v=0.1$  のとき )

で解が得られ，全 Lagrange の方法より各増分ステップでのニュートン法の収束性がよい．

以上より，幾何学的非線形解析には，更新 Lagrange の方法が有効である．