

薄肉構造に適用可能なソリッド要素の開発に関する研究

建設構造研究室 馬場 道彦
 指導教官 岩崎 英治
 長井 正嗣

1. はじめに

有限要素法では、通常、細長い部材には、はり要素を薄肉部材には板・シェル要素が使われている。これは、細長い部材には断面剛の仮定や単軸応力状態、薄肉部材には板厚不変の仮定や平面応力状態という、力学特性や応力状態を部材形状に合わせ定式化した要素である。また、これら以外の塊状の部材にはソリッド要素が用いられる。この要素は他の要素に比べ、定式化が容易であるため他の細長い部材や薄肉部材にも用いることのできる汎用性のある要素である。しかし、ソリッド要素が他の部材に用いられないのは、要素分割を非常に多くしなければ、剛性を過大評価し精度が極端に低下してしまうせん断ロッキングが生じるためである¹⁾。

2. 背景と目的

そこで当研究室での既往の研究では、直方体要素を考え、せん断ロッキングや単軸応力状態、平面応力状態での精度低下を緩和したひずみと応力式を提案し、さらに、任意形状でのソリッド要素へと拡張を行った^{2) 3)}。この要素は従来に比べ、高精度の解を得るとともに単軸応力状態や平面応力状態を表現でき、断面内や板厚方向に分割を行うと、さらに詳しく対象部材の状態を調べることができる。しかし、この要素は、任意形状における定式化が煩雑であるため、非線形解析へ拡張するとなると複雑で困難となる。また、非常に薄い部材においては、要素の形状が歪んでいると精度が悪くなるという問題が残った。

そこで本研究では、既往の要素の特性を持ちつつも、要素の定式化を簡略化し、同程度かそれ以上の

精度で解析のできる要素の開発を行うこととする。また、非常に薄く歪んだ要素においてでもせん断ロッキングを十分に緩和し、精度の向上を図る。

3. 要素の定式化における簡略化

3.1 簡略方法

直方体のような歪みがない要素では、ひずみや応力式は、簡単に表すことができる。しかし、歪んだ要素形状では、ひずみ式中の項が多くなり、剛性行列の作成が、非常に複雑になってしまう。そこで、任意形状でのひずみや応力を軸に関して級数展開を行い、簡略化のために、直方体要素と同じ軸に関する項だけを残し、他の項は削除することにする。そこで以下に示す式は、薄肉部材において板厚方向をz軸にした場合に精度の向上が期待できるようにしたひずみと応力式である。

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + \eta\varepsilon_{xx}^{(2)} + \zeta\varepsilon_{xx}^{(3)} + \eta\zeta\varepsilon_{xx}^{(23)} \\
 \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^{(0)} + \xi\varepsilon_{yy}^{(1)} + \zeta\varepsilon_{yy}^{(3)} + \zeta\xi\varepsilon_{yy}^{(31)} \\
 \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz}^{(0)} + \xi\varepsilon_{zz}^{(1)} + \eta\varepsilon_{zz}^{(2)} + \xi\eta\varepsilon_{zz}^{(12)} \\
 \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^{(0)} + \zeta\varepsilon_{xy}^{(3)} \\
 \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{yz}^{(0)} + \xi\varepsilon_{yz}^{(1)} + \zeta\varepsilon_{yz}^{(3)} + \zeta\xi\varepsilon_{yz}^{(31)} \\
 \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{zx}^{(0)} + \eta\varepsilon_{zx}^{(2)} + \zeta\varepsilon_{zx}^{(3)} + \eta\zeta\varepsilon_{zx}^{(23)} \\
 \sigma_{xx} &= C_1\varepsilon_{xx}^{(0)} + C_2\varepsilon_{yy}^{(0)} + C_2\varepsilon_{33}^{(0)} \\
 &\quad + \zeta(C_3\varepsilon_{xx}^{(3)} + C_4\varepsilon_{yy}^{(3)}) + E(\eta\varepsilon_{xx}^{(2)} + \eta\zeta\varepsilon_{xx}^{(23)}) \\
 \sigma_{yy} &= C_2\varepsilon_{xx}^{(0)} + C_1\varepsilon_{yy}^{(0)} + C_2\varepsilon_{33}^{(0)} \\
 &\quad + \zeta(C_4\varepsilon_{xx}^{(3)} + C_3\varepsilon_{yy}^{(3)}) + E(\xi\varepsilon_{yy}^{(1)} + \zeta\xi\varepsilon_{yy}^{(31)}) \\
 \sigma_{zz} &= C_2\varepsilon_{xx}^{(0)} + C_2\varepsilon_{yy}^{(0)} + C_1\varepsilon_{33}^{(0)} \\
 \sigma_{xy} &= 2G(\varepsilon_{xy}^{(0)} + \zeta\varepsilon_{xy}^{(3)}) \\
 \sigma_{yz} &= 2G(\varepsilon_{yz}^{(0)} + \xi\varepsilon_{yz}^{(1)} + \zeta\varepsilon_{yz}^{(3)} + \zeta\xi\varepsilon_{yz}^{(31)}) \\
 \sigma_{zx} &= 2G(\varepsilon_{zx}^{(0)} + \eta\varepsilon_{zx}^{(2)} + \zeta\varepsilon_{zx}^{(3)} + \eta\zeta\varepsilon_{zx}^{(23)})
 \end{aligned} \right\} (1)$$

ここで、 $\varepsilon_{ij}^{()}$ はそれぞれの軸や面内に関するひずみの平均値としており、以下の例のようにおく。

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}(0,0,0) \quad (2-1)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \varepsilon_{ij} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right) - \varepsilon_{ij} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right) \right\} \quad (2-2)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(23)} = \frac{3}{4} \left\{ \varepsilon_{ij} \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \varepsilon_{ij} \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \varepsilon_{ij} \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \varepsilon_{ij} \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \quad (2-3)$$

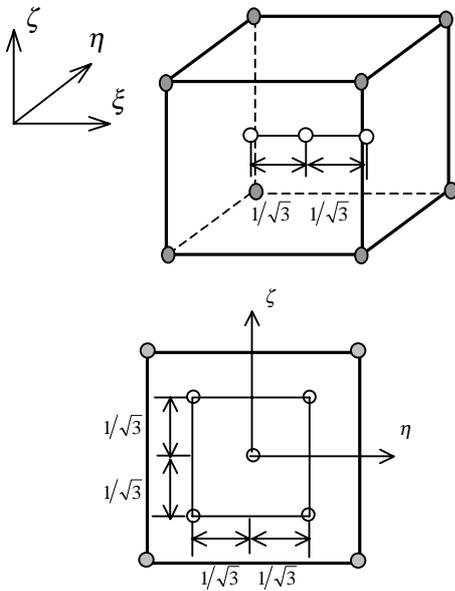


図1 軸や面内に関する変化量を表す参照点

右肩の(0)は、要素内一定のひずみを表しており、要素中心点でのひずみを参照している。また(1)、(2)、(3)は、 ξ 、 η 、 ζ 軸に関するひずみを表しており、図1のような参照点での変化量の平均値から求めている。同様に(23)、(31)、(12)は、 ξ 、 η 、 ζ 面内に関するひずみを表しており、図1のような参照点の変化量から平均値を求めている。

これと同じ方法で細長い部材用のひずみと応力式は、はりの軸方向を x 軸とした場合に以下の式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + \eta \varepsilon_{xx}^{(2)} + \zeta \varepsilon_{xx}^{(3)} + \eta \zeta \varepsilon_{xx}^{(23)} \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^{(0)} + \xi \varepsilon_{yy}^{(1)} + \zeta \varepsilon_{yy}^{(3)} + \zeta \xi \varepsilon_{yy}^{(31)} \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz}^{(0)} + \xi \varepsilon_{zz}^{(1)} + \eta \varepsilon_{zz}^{(2)} + \zeta \eta \varepsilon_{zz}^{(12)} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^{(0)} + \eta \varepsilon_{xy}^{(2)} + \zeta \varepsilon_{xy}^{(3)} + \eta \zeta \varepsilon_{xy}^{(23)} \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{yz}^{(0)} + \xi \varepsilon_{yz}^{(1)} + \eta \varepsilon_{yz}^{(2)} + \zeta \varepsilon_{yz}^{(3)} + \zeta \xi \varepsilon_{yz}^{(31)} + \xi \eta \varepsilon_{yz}^{(12)} \\ \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{zx}^{(0)} + \eta \varepsilon_{zx}^{(2)} + \zeta \varepsilon_{zx}^{(3)} + \eta \zeta \varepsilon_{zx}^{(23)} \\ \sigma_{xx} &= C_1 \varepsilon_{xx}^{(0)} + C_2 \varepsilon_{yy}^{(0)} + C_2 \varepsilon_{zz}^{(0)} + E(\eta \varepsilon_{xx}^{(2)} + \eta \zeta \varepsilon_{xx}^{(23)}) \\ \sigma_{yy} &= C_2 \varepsilon_{xx}^{(0)} + C_1 \varepsilon_{yy}^{(0)} + C_2 \varepsilon_{zz}^{(0)} \\ \sigma_{zz} &= C_2 \varepsilon_{xx}^{(0)} + C_2 \varepsilon_{yy}^{(0)} + C_1 \varepsilon_{zz}^{(0)} \\ \sigma_{xy} &= 2G(\varepsilon_{xy}^{(0)} + \eta \varepsilon_{xy}^{(2)} + \zeta \varepsilon_{xy}^{(3)} + \eta \zeta \varepsilon_{xy}^{(23)}) \\ \sigma_{yz} &= 2G(\varepsilon_{yz}^{(0)} + \xi \varepsilon_{yz}^{(1)} + \eta \varepsilon_{yz}^{(2)} + \zeta \varepsilon_{yz}^{(3)} + \zeta \xi \varepsilon_{yz}^{(31)} + \xi \eta \varepsilon_{yz}^{(12)}) \\ \sigma_{zx} &= 2G(\varepsilon_{zx}^{(0)} + \eta \varepsilon_{zx}^{(2)} + \zeta \varepsilon_{zx}^{(3)} + \eta \zeta \varepsilon_{zx}^{(23)}) \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで、先ほどの薄肉部材用のひずみと応力式を用いた定式化の要素を‘Plate1’、細長い部材用を‘Beam1’とする。また、薄肉部材・細長い部材において軸を指定せずに精度向上を目的とした場合のひずみと応力式を用いた要素を、‘Plate2 * Beam2’とする。

記号	要素の種類	軸指定
Plate 1	本研究で開発した	あり
Plate 2	板・シェル要素	なし
Beam 1	本研究で開発した	あり
Beam 2	はり要素	なし
Plate 2-old	既往の	あり
Plate 1-old	板・シェル要素	なし
Beam 1-old	既往の	あり
Beam 2-old	はり要素	なし

表1 既往の要素と改良要素

表1に示す要素は、本研究で開発した要素と既往の要素を表している。‘-old’のついた要素が、本研究室で開発した要素であり、新しい要素と同じ目的で精度を向上させた要素である。しかし、正確な定式化を行っているために、剛性行列の誘導が複雑になっている。

3.2 数値解析 板部材

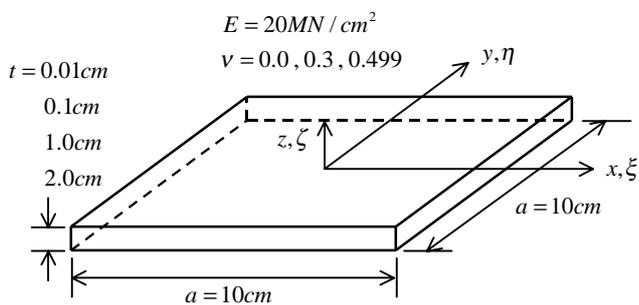


図2 正方形板 (等分布荷重 $q=1\text{N/cm}^2$)

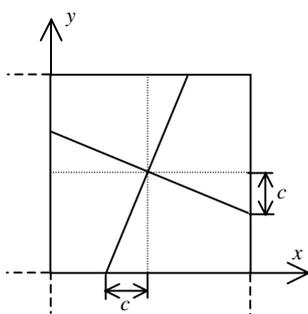


図3 分割モデル

板・シェル部材用のモデルとして図2のような四辺単純支持された正方形板とし，上縁に等分布荷重 $q = 1\text{N/cm}^2$ を作用した場合を考える．板厚 $2.0, 1.0, 0.1, 0.01\text{cm}$ の4種類とポアソン比 $0.0, 0.3, 0.499$ の3種類を考え，さらに $1/4$ 領域においては図3のような c の値を変化させることで要素形状を決定させるモデルとする．板中央での応力とたわみを表1の8つの要素で調べた．

◆ Plate1	■ Plate2	▲ Beam1	● Beam2
◇ Plate1-old	□ Plate2-old	△ Beam1-old	○ Beam2-old

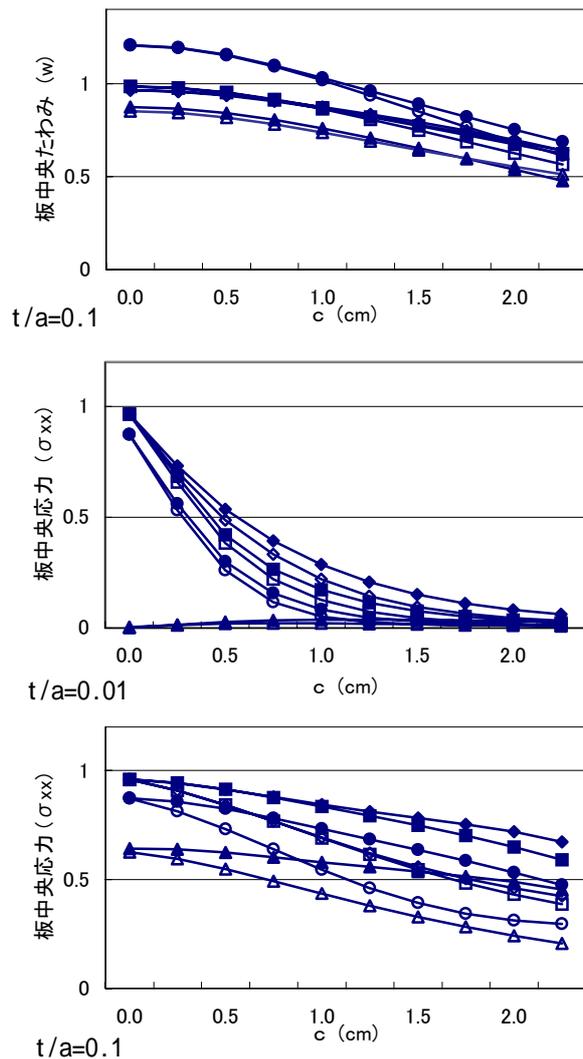
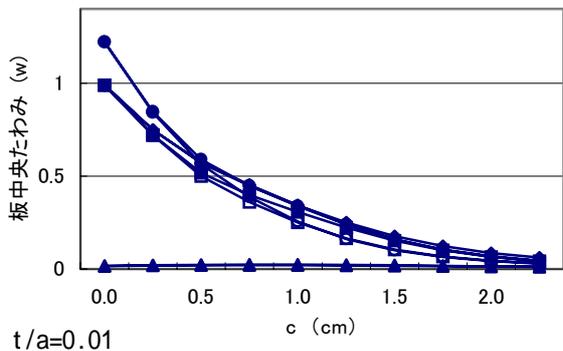


図4 板厚 $0.1, 1.0\text{cm}$ のときのたわみと応力($\nu=0.3$)

ここで t/a とは，板厚 t を正方形板一辺の長さ a で割った値を示している．ここにポアソン比が 0.3 で板厚が 1.0cm のときのたわみと応力を示す． y 軸は Mindlin の板理論による理論値で正規化しているので， 1 が正解値となっている．

図4より，板厚が薄い場合には Beam1 要素と Beam1-old 要素の精度は悪いことがわかる．他の要素で，たわみの精度は新しい要素と既往の要素とでは，差がなく同程度の精度であるといえる．応力では，既往の要素に比べ，すべての新しい要素において要素形状の歪みが大きくなるにつれて精度低下が緩やかになっていることがわかる．また，精度が良い要素は 'Plate 1' 'Plate 2' 要素の順であること

がわかる。また、要素形状の歪みがない $c=0.0$ では、要素が直方体であることから、新しい要素と既往の要素とでは、式が同じとなるため、精度が等しくなっている。

4. 薄く歪んだ要素での精度低下の改善

4.1 精度低下の改善方法

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{yz}^{(0)} + \alpha \xi \varepsilon_{yz}^{(1)} + \zeta \varepsilon_{yz}^{(3)} + \zeta \xi \varepsilon_{yz}^{(31)} \\ \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{zx}^{(0)} + \alpha \eta \varepsilon_{zx}^{(2)} + \zeta \varepsilon_{zx}^{(3)} + \eta \zeta \varepsilon_{zx}^{(23)} \\ \sigma_{yz} &= 2G(\varepsilon_{yz}^{(0)} + \alpha \xi \varepsilon_{yz}^{(1)} + \zeta \varepsilon_{yz}^{(3)} + \zeta \xi \varepsilon_{yz}^{(31)}) \\ \sigma_{zx} &= 2G(\varepsilon_{zx}^{(0)} + \alpha \eta \varepsilon_{zx}^{(2)} + \zeta \varepsilon_{zx}^{(3)} + \eta \zeta \varepsilon_{zx}^{(23)}) \end{aligned} \right\} (4)$$

上記に示す式は、'Plate 1' 要素のせん断ひずみとせん断応力を表している。この式中の α が乗じている項を削除することで精度を向上させることが可能であることがわかったが、削除するとゼロエネルギーモードが発生する可能性が生じる。これは、この変形モードがひずみエネルギーに寄与しなくなるため、剛性行列が特異となり解が求められなくなることで、解析対象の支持条件や分割の仕方によって発生することがわかっている。そこで、この項にパラメータを乗し、値を調節することで精度向上を図ることにする。

4.2 数値解析

モデルは、3.2章と同じモデルを用い、支持条件は、二辺固定二辺自由支持としている。比較を行うために、自由端の隅各部でのたわみと板中央での応力を調べた。

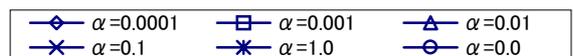
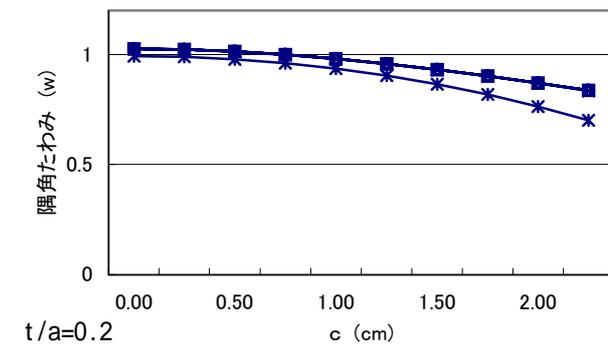
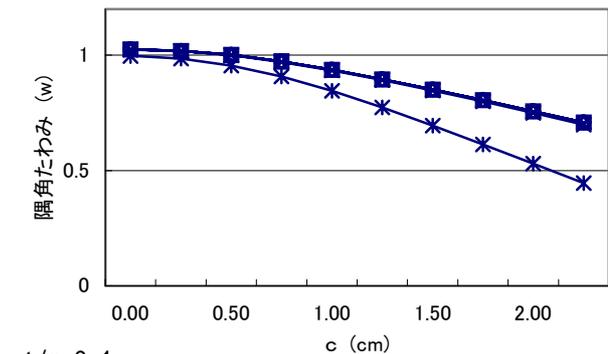
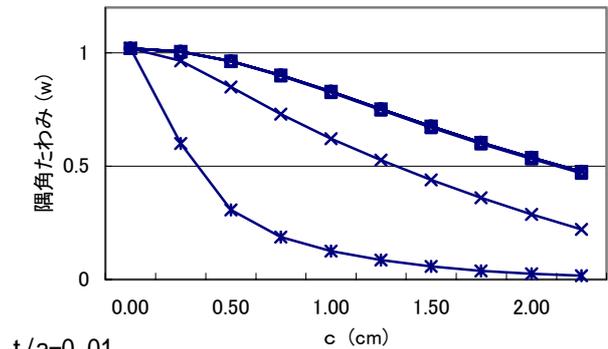
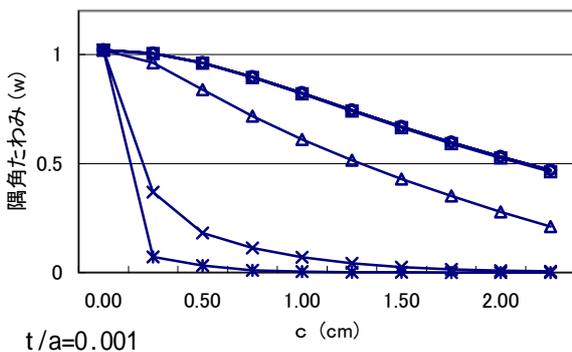


図5 板厚ごとの自由端隅角部のたわみ($\nu=0.3$)

ここにポアソン比が 0.3 のときの板厚ごとのたわみを示す。このグラフから板厚が薄く要素形状の歪みが生じると精度が極端に悪くなっていることがわかる。また、パラメータ α にゼロを用いた場合、つまり削除した場合には精度が向上しているが、削除しなくとも t/a 程度の値でゼロに相当する精度が上げることがわかった。

5. 既往の要素との比較

5.1 比較対象

記号	要素の種類
Full	完全積分による要素
Reduce	低減積分による要素
Select	せん断剛性を低減積分による要素
Koh1	Koh と Kikuchi の要素 1
Koh2	Koh と Kikuchi の要素 2
Liu	Liu, Hu と Belytschko の要素

表 2 従来の要素

本研究で開発した要素の適用性を検討するために表 2 に示す既往の 6 種類の要素を用いて数値計算を行う。

Full 要素は完全積分(2×2×2点 Gauss 積分)によるアイソパラメトリック要素で、せん断ロッキングを避けられない。Reduce 要素は低減積分(1×1×1点 Gauss 積分)による要素でせん断ロッキングを緩和するがゼロエネルギーモードを含むため剛性行列が特異になることがある。Select は、せん断剛性のみを低減積分した要素である。Koh1 要素と Koh2 要素は、方向別次数低減積分法による要素で、3 つのパラメータを導入し、組み合わせによってせん断ロッキングを緩和しており、Koh1 要素は細長い部材に Koh2 要素は薄肉部材に適用するようにパラメータを決定している。Liu 要素は、要素座標系を導入した選択的次數低減積分法となっている。

5.2 数値解析 板部材

モデルは、3.2 での図 2 の正方形板モデルを用いている。ただし、分割パターンは対称性を考慮し、1/4 領域において x-y 面内を 2×2, 4×4, 8×8, 16×16 の要素分割を行い、さらに板厚方向に 1, 2, 4 分割の計 12 種類の分割パターンで行った。比較検討を行うために、板中央でのたわみと応力 σ_{xx} , σ_{yy} を調べた。

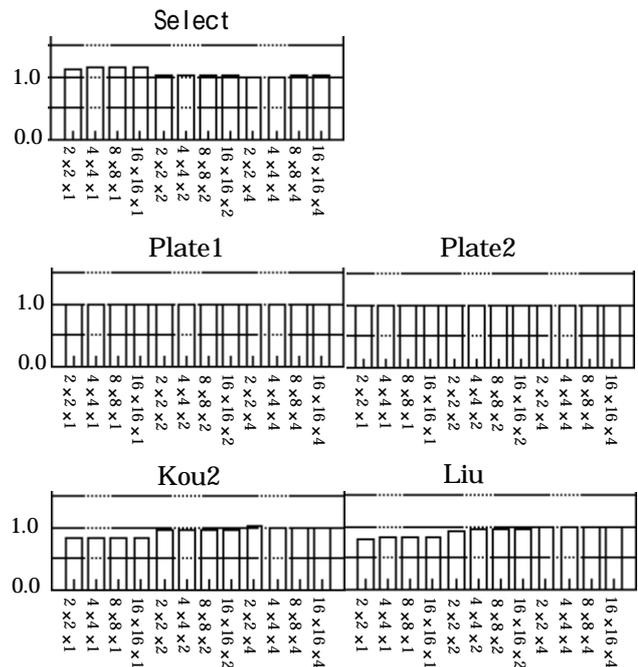
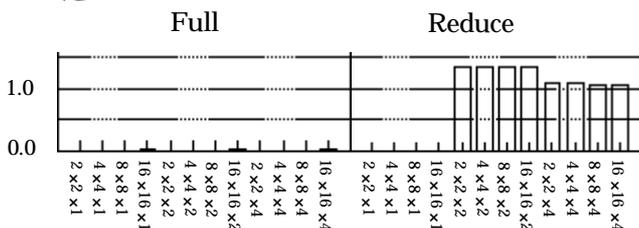


図 6 板厚 0.001cm での板中央でのたわみ

ここにポアソン比が 0.3 で板厚が 0.001cm のときのたわみを示す。各要素には x-y 面内の 4 種類の分割数による値が板厚方向の分割数順に並び、計 12 個の値が並んでいる。

Full 要素ではせん断ロッキングが生じ、精度が悪い。Reduce 要素は板厚方向に 1 分割であると剛性行列が特異になり、解が得られていない。しかし、Plate1 要素と Plate2 要素は分割数が少なくとも精度よくせん断ロッキングを緩和していることがわかる。

5.3 数値解析 はり部材

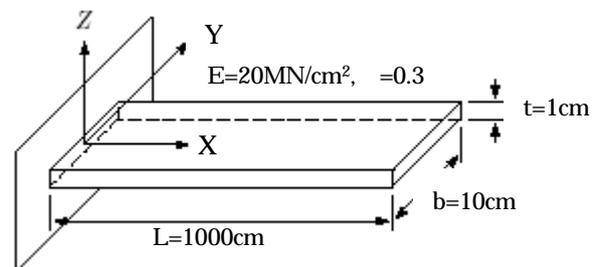


図 7 片持ち梁

モデルは図 7 に示す片持ち梁を用いており、荷重は、鉛直荷重、水平荷重、ねじり荷重の 3 種類を作

用させた .分割パターンは ,表 3 に示す 21 通りで行っている . 比較検討を行うために , それぞれの荷重に対して , 固定端から 200cm での応力と自由端での変位を調べた .

ここに鉛直荷重が作用したときの各要素での応力

Model	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	5	10	20	5	10	20	5	10	20	5
y	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2
z	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2

Model	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x	10	20	5	10	20	5	10	20	5	10	20
y	2	2	4	4	4	1	1	1	4	4	4
z	2	2	1	1	1	4	4	4	4	4	4

表 3 分割パターン

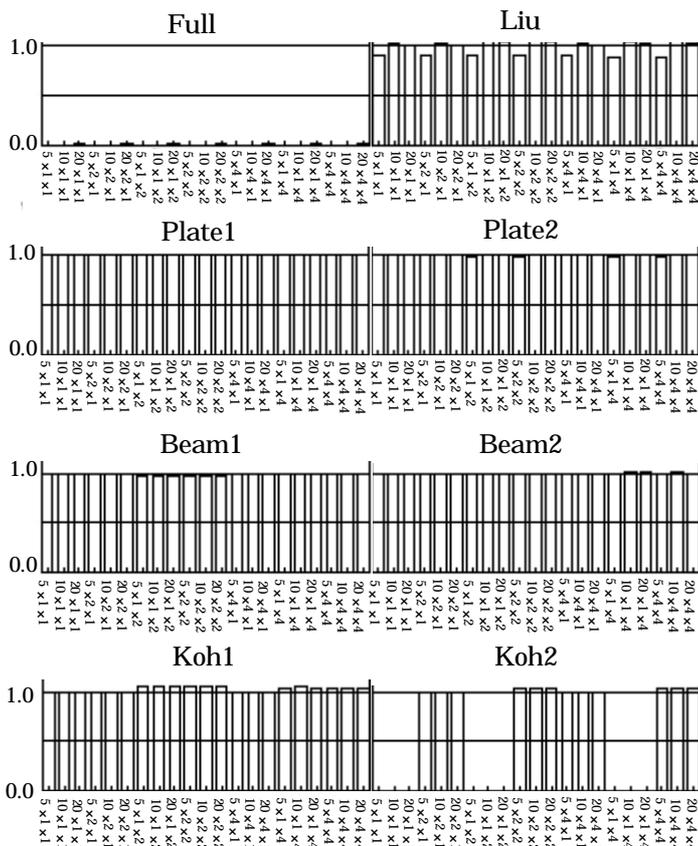


図 8 片持ち梁における $x=200$ での応力 σ_x

σ_x を示している . 各要素の x 軸には表 3 に示す分割数順で計 21 個並べている .

Full 要素は前節同様 , せん断ロッキングが生じ , 精度が悪い . Koh2 要素も同様に 1 方向に 1 分割がある場合に解が特異になっている . しかし , 本研究での 4 種類の要素全てにおいて分割数が少なくても精度よく , 解析が行えていることがわかる .

6. 結論

これらの結果から以下のような結論が得られる .

- ひずみや応力を座標軸に関して級数展開する簡略な定式化による本方法でも , 既往の要素に比べ , 同程度かそれ以上の精度の解が得られることが明らかになった .
- 数値計算により , Plate 1 要素でのパラメータには , 板厚 t と幅の比 t/a 程度の大きさの値を設定することでゼロエネルギーモードを発生させず , せん断ロッキングを緩和できることがわかった .
- 4 種類の要素の精度を , 薄肉部材と細長い部材について確認した結果 , どちらの部材も ' Plate 1 ' 要素が精度よく解析できることが分かった .

参考文献

- 1) 鷲津久一郎 , 宮本博 , 山田嘉昭 , 山本善之 , 川井忠彦 : 有限要素法ハンドブック , 培風館 1981
- 2) 岩崎英治 , 林正 : 骨組構造解析に適用可能な低次ソリッド要素の開発 土木学会論文集 No.577/I-41.pp.231-243.1997.10.
- 3) 岩崎英治 , 林正 : はり部材や板シェル部材に適用可能なソリッド要素の開発 , 計算工学講演会論文集 (日本計算工学会).Vol.2. pp431-434.1997.5