非線形平衡方程式の数値解析法の効率化とロバスト化に関する研究

建設構造研究室　新保 剛貴
指　導　教　官　岩崎 英治
長井 正嗣

1　序　論

現在，骨組構造物の幾何学的非線形解析手法に関する限り，理論的な基礎はほぼ完成していると考えられている．実際に非線形解析を必要とする設計者や技術者にとって，複雑な理論や，煩雑なアルゴリズムよりなる数値解析法を理解するのは，時間的制約もあり困難となっている．このため，収束性や求解に必要な，物理的に不明確なパラメータを減らし，入力データが容易に作成できるような非線形解析システムの開発が必要である．

本研究では，非線形解析を容易にすることを目的として，既往の研究で汎用性が高いとされている弧長制御法に着目した．弧長制御法は汎用性があり，他の手法に比べて優れた解法である．しかし，幾つかの問題点もあり，本研究室でその問題点を解決してきた．弧長制御法で効率的に解を得るためには，スケーリングパラメータの適切な設定が必要であり，従来の設定方法は多数の試行錯誤と解析者の経験を必要とする．また，本研究室では，効率的な反復法[1), 3)]と弧長の自動設定法[2), 3)]を開発したが，この手法は釣合曲線における主経路のみでその有効性を検討したに過ぎず，主経路から分岐経路に移行したときの経路では検討していない．

そこで，本研究では，効率的なスケーリングパラメータの設定方法を検討し，弧長自動設定法を分岐経路にも対応できるように拡張を行う．

2　数値解析法

2.1　非線形平衡方程式

変位法によるマトリクス構造解析法に現れる連立非線形方程式は，構造全体の力の釣り合い条件を表す平衡方程式である．この方程式の未知変数は節点変位で，その数 (構造物の自由度数) を n とすると，全節点変位を n 次の列ベクトル $\boldsymbol{D}$ で表せば，有限要素での n 次元連立非線形方程式は次式のようになる．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{P} \tag{1}$$

ここに, $\boldsymbol{F}$ は内力ベクトル, $\boldsymbol{P}$ は外力ベクトルで, 保存力であるとする．なお，内力は初期状態から現時点までの変位の履歴で表されるが，表現を簡略化して変位 $\boldsymbol{D}$ で表す．また，解析を通して荷重のモードが一定である場合には，ある一定の荷重ベクトル (基準ベクトル)$\overline{\boldsymbol{P}}$ と荷重の倍率 λ の積で外力ベクトルは表される．このような問題では上式は次のようになる．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{D}) = \lambda\overline{\boldsymbol{P}} \tag{2}$$

上式のような n 個の変位成分と荷重倍率 λ で表される平衡方程式の解は，$(n{+}1)$ 次元空間での曲線を表している．すなわち，上式を解くということは曲線を求めることに他ならない．この曲線を釣り合い曲線と呼んでいる．

上式を増分形で表すと

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{D})\Delta\boldsymbol{D} = \Delta\lambda\overline{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{D}) \tag{3}$$

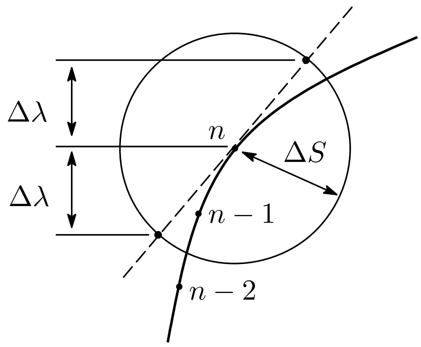
となる．荷重倍率の増分 $\Delta\lambda$ を与えて解 $\Delta\boldsymbol{D}$ を求める方法を増分法，特に荷重を制御変数とする方法を荷重増分法と呼んでいる．なお，上式の $\boldsymbol{R}$ は次式で定義されるベクトルである．

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{D}) = \lambda\overline{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{D}) \tag{4}$$

これは，増分量に関して線形化されたために生じる誤差で，不平衡力と呼ばれる．増分計算により平衡状態の解が得られている場合にはゼロとなる量である．

2.2　弧長制御法

弧長制御法では，変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{D}$ と荷重倍率 $\Delta\lambda$ から求められる釣り合い曲線の弧長 ΔS を与えて，変位と荷重を求める．このための方法とし



図–1 弧長制御法

て，種々の方法が考えられるが，ここでは係数行列の対称性を損なわない方法を述べる．

弧長は $\Delta S^2 = \Delta \boldsymbol{D}^T \Delta \boldsymbol{D} + \Delta\lambda^2$ により与えられるが，変位，回転と荷重倍率の次元が異なるのでスケールを揃えるためのパラメータ α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ と α_p を導入し，弧長を次のように表す．

$$\Delta S^2 = \Delta \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{A}^2 \Delta \boldsymbol{D} + \alpha_p^2 \Delta\lambda^2 \tag{5}$$

ここに，行列 $\boldsymbol{A}$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

またここで，基準荷重 $\overline{\boldsymbol{P}}$ による変位 $\boldsymbol{D}_0$ と不平衡力 $\boldsymbol{R}$ による変位 $\boldsymbol{D}_1$ に分けて変位 $\Delta \boldsymbol{D}$ を表し，これを前式に代入すると次式が得られる．

$$\Delta S^2 = (\Delta\lambda \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{D}_1)^T \boldsymbol{A}^2 (\Delta\lambda \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{D}_1) + \alpha_p^2 \Delta\lambda^2 \tag{7}$$

これを荷重倍率に関して解くと，

$$\Delta\lambda_j = \frac{-\mathcal{Y} \pm \sqrt{\mathcal{Y}^2 - \mathcal{X}\mathcal{Z}}}{\mathcal{X}} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \mathcal{X} = {\alpha_p}^2 + {\boldsymbol{D}_0}^T \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{D}_0 \\ \mathcal{Y} = {\boldsymbol{D}_0}^T \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{D}_1 \\ \mathcal{Z} = \Delta S^2 - {\boldsymbol{D}_1}^T \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{D}_1 \end{cases}$$

上式より，弧長の式を満足する荷重倍率は二つあることが分かる．これは，**図 1** のように $(n+1)$ 次元空間内での球面と接線との交点が二つあるためである．このとき，荷重倍率としてどちらを用いるかが問題になる．すなわち，誤った荷重倍率を用いると釣り合い曲線上を後戻りすることになる．また，弧長 ΔS をあまり小さくしすぎると上式のルートの中が負になることがある．すなわち，弧長は次式を満足していなければならない．

$$\Delta S^2 > \boldsymbol{D}_1^T \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{D}_1 - \frac{(\boldsymbol{D}_0^T \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{D}_1)^2}{\alpha_p^2 + \boldsymbol{D}_0^T \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{D}_0} \tag{9}$$

このようにして得た解は，釣り合い方程式を線形化しているために，正確な平衡状態にない．そこで，不平衡力を許容値以下に収める反復解法を用いる必要がある．この手法には既往の研究で幾つか考案されているが，本研究においては既往の研究でその有効性が確認されている，不平衡ベクトル最小法を用いている．

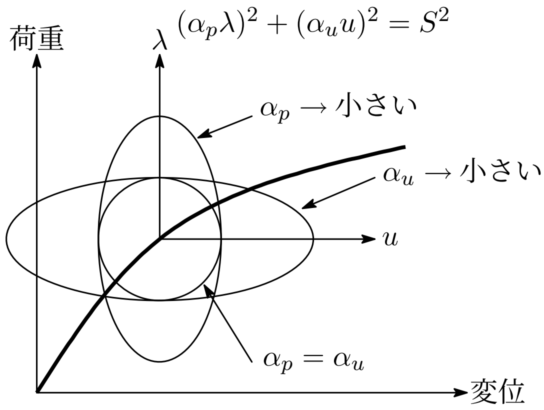
反復計算中の修正量 ΔL は弧長と同様の式で表される．

$$\Delta L^2 = \Delta {\boldsymbol{D}_j}^T \boldsymbol{A}^2 \Delta \boldsymbol{D}_j + {\alpha_p}^2 {\Delta\lambda_j}^2$$

$\Delta \boldsymbol{D}_j$ を分解すると，荷重倍率の 2 次式となり，ΔL を最小とする荷重倍率が，微分により次のように得られる．これが，不平衡ベクトル最小法である．

$$\Delta\lambda = -\frac{\boldsymbol{D}_j^T \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{D}_j}{\alpha_p^2 + \boldsymbol{D}_j^T \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{D}_j} \tag{10}$$

2.3　スケーリングパラメータ



図–2 スケーリングパラメータ

弧長制御法での弧長は，荷重倍率と変位の空間で定義され，荷重と変位や回転角の次元が異なるために，不整合な問題が生じる．そのため，それぞれの次元や数値的な大きさを揃えるためのスケーリングパラメータを導入する．

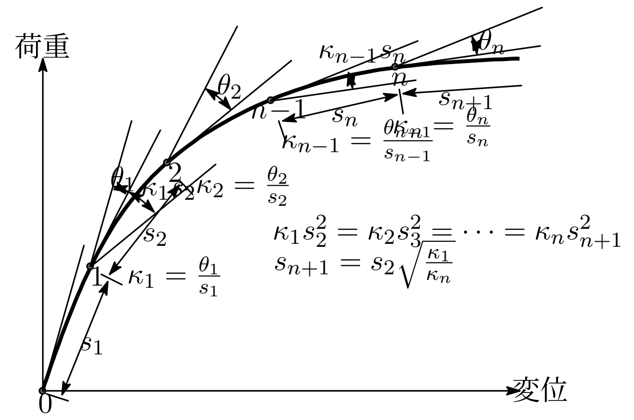
そこで，**図 2** を元に, スケーリングパラメータの設定方法について考察する．全てのスケーリングパラメータが等しい場合には, 球面となり, 全てのパラメータを等しく, 大きくすると弧長 S を一定としても, 球面の半径は小さくなり, 逆にパラメータを小さくすると球の半径は大きくなる．また, 特定のスケーリングパラメータだけを小さくすると, その成分方向に長い楕円となる．これより, 変位に関するスケーリングパラメータを非常に小さくすると, 荷重増分法に近い収束特性をもつようになり, 荷重に関するパラメータを非常に小さくすると変位増分法に近い収束特性をもつようになる．

線形解，固有ベクトルなどを使用した設定方法，各増分ステップごとに設定する方法，制御変数を荷重倍率と変位成分の数個に限定し試行錯誤する方法などを検討したが，それぞれの設定方法に利点や欠点が存在する．そこで本研究でのスケーリングパラメータの設定は以下のような方法によって行う．式 (5) より，荷重倍率によるスケーリングパラメータを $\alpha_p = 1$ とし，変位によるスケーリングパラメータ α_u を全変位成分に乗じると次のようになる．

$$\Delta S^2 = \Delta\lambda^2 + \alpha_u^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i^2 \qquad (11)$$

式 (5) では回転角を含んでいるが，式 (11) は回転角を含んでいない．この式 (11) を使用した縦軸に荷重倍率 λ，横軸に変位成分 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$ の曲線を用いてスケーリングパラメータを算出する．そして，そのスケーリングパラメータを使用して，それ以後の計算を行う．

特徴としては，スケーリングパラメータを設定する際に未知数であるスケーリングパラメータがひとつだけであり，従来の方法に対して試行錯誤による労力が少ないことである．また，荷重倍率によるスケーリングパラメータ α_p を一定としているので，変位によるスケーリングパラメータ α_u を変化させることで，**図 2** からも見て分かるとおり，弧長 ΔS の形状を横長や縦長の楕円にすることができる．これによって，前述の曲線を用いて，その曲線に適したスケーリングパラメータを簡単に設定することができる．



図–3 弧長の自動設定

3　弧長増分量の自動設定

弧長制御法においては，反復計算により誤差を低減する一方で，さらに，非線形性が強い場合には, 増分量を小さくし, 非線形性が弱い場合には, 増分量を大きくすることにより, 反復回数の低減や計算コストの節約を図れることが期待できる．しかし, 釣り合い曲線の形状が事前に分からなければ, 適切な増分量を設定することは困難なので, 釣り合い曲線の非線形性の強弱, 言い換えれば, 釣り合い曲線の曲率に応じて増分量の大きさを, 自動的に設定できるような手法が必要になる．

そこで，ここでは本研究室の既往の研究であり, 本研究では弧長自動設定法を使用する．

3.1　本研究で使用する弧長自動設定法

そこで, **図 3** をもとに増分量の設定方法を示す．

増分計算により点 n までの解が得られているものとする．点 n と一つ前の点 $(n-1)$ の距離を Δs_n, 同様にその前の点までの距離を Δs_{n-1} と表す．また, 点 $(n-1)$ の接線とさらに一つ前の点 $(n-2)$ の接線の間の角 θ_{n-1} を, これらの点の距離 Δs_{n-1} で割ったものを点 $(n-1)$ の曲率 κ_{n-1} とする．すなわち,

$$\kappa_{n-1} = \frac{\theta_{n-1}}{\Delta s_{n-1}} \qquad (12)$$

同様に, 点 $(n-1)$ と次の点 n の間の角度変化 θ_n と距離 s_n から曲率 κ_n は

$$\kappa_n = \frac{\theta_n}{\Delta s_n}$$

と表される．

この曲率に次の点 $(n+1)$ までの距離 Δs_{n+1} を乗じたもの $\kappa_n \Delta s_{n+1}$ は, 点 $(n+1)$ での角度変化 θ_{n+1} を近似している．また, この角度変化に距離 Δs_{n+1} を乗じたものは, 点 $(n+1)$ での釣り合い曲線上の点からのずれ変位 (誤差) を表す指標と考えられる．この誤差の指標が常に同じ大きさになるように弧長 Δs を決めると, 各増分計算での反復回数の均等化が図られるものと予想される．

そこで, この方法を用いて次の点までの距離を決めることにする．すなわち,

$$\kappa_n(\Delta s_{n+1})^2 = \kappa_{n-1}(\Delta s_n)^2 = \cdots = \kappa_1(\Delta s_2)^2$$

これより,

$$\Delta s_{n+1} = \Delta s_n \sqrt{\frac{\kappa_n - 1}{\kappa_n}} = \cdots = \Delta s_2 \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_n}}$$

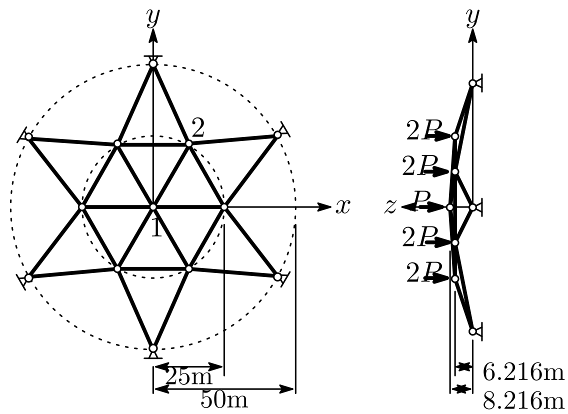
全ての増分段階での平衡点からのずれが等しくなるように弧長を決めるので, Δs_{n+1} として用いる式は, 上式のどれを用いても同じである．しかし, 数値計算上の誤差の累積や, 各増分段階での繰り返し計算の手法として, 不平衡ベクトル最小法などの最初に設定した球面上から外れた点に収束する手法を用いた場合には, 各増分段階でのずれ変位 $\kappa_n \Delta s_{n+1}^2$ が等しくなっていないので, ここでは, 常に, 最初のずれ変位 $\kappa_1(\Delta s_2)^2$ に等しくなるように決めることにする．すなわち, 次式により弧長 Δs_{n+1} を決める．

$$\Delta s_{n+1} = \Delta s_2 \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_n}} \tag{13}$$

上式に含まれる κ_1, Δs_2 は, 初めの二つの平衡点 1 と 2 での解が, 明らかになっていなければ求められない．したがって, ここに提案する手法は, 初めの 2 点については, 弧長を事前に設定する必要があることに注意する必要がある．

3.2　分岐経路の計算

一般に非線形解析における分岐モードの計算は, 各釣合点での接線剛性マトリックス K から固有値解析を行う必要がある．しかし，大規模な非線形解析を行う際は，この固有値解析が非常に大きな計算負荷を与えてしまう．また，分岐点からの分岐経路への切り替えは，分岐モードが不可欠なもので，固有値解析でなければ求められないとこれまで考えられてきた．そこで，野口と久田 [4]は, 弧長制御法の釣合反復過程のなかで，特異点近傍における不平衡力に対する変位修正子が，収束点直前で分岐座屈モードを近似することに着目し，scale corrector という計算方法が考えられた．そして，藤井と野口 [5]により，先ほどと同様な発想から，釣合曲線を求めていく際の接線剛性マトリックス K の $\boldsymbol{LDL}^T$ 分解の中からも簡単に座屈モードを求めることができる計算手法が提案されている．この方法によると，特異点近傍または特異点遠方からでも座屈モードを求められ，多重分岐点においてもぞれぞれの座屈モードを計算することができる．また，計算負荷は，通常の接線剛性マトリックス K の $\boldsymbol{LDL}^T$ 分解に加わるのみなので，実質的には無視できるほどである．したがって，本研究での分岐経路の計算はこの方法を用いて行うことにする．



E=20MN/m^2, A=1.0m^2

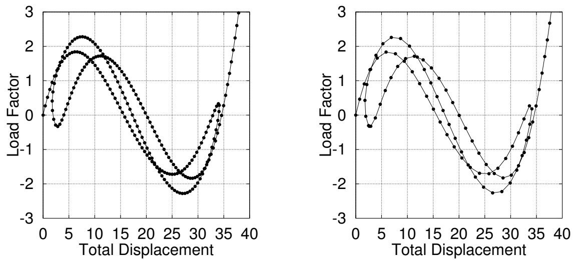
図–4 トラスドーム

4　数値計算例及び考察

4.1　トラスドームのスケーリングパラメータの設定

図 4 のようなトラスドームの中心の節点に鉛直荷重 P，外周の節点に $2P$ を作用させたときを考える．このトラス部材のヤング係数は E=20MPa, 断面積は A=1m^2 としている．計算に用いる弧長は一定として，$\Delta S = 0.5$ で計算する．基準荷重は $P_0 = 100MN$ として，収束計算には不平衡ベクトル最小法を用いており，収束判定は，収束計算途中の変位の修正量のノルムが各増分段階の最初の変位増分ノルムの 0.001 倍以下としている．

図 5(a) にスケーリングパラメータを $\alpha_u = 1.0$ として計算した際の荷重倍率と全変位成分の関係



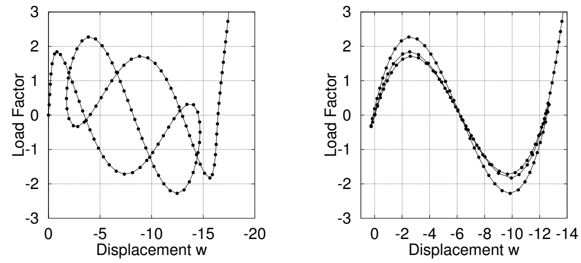
(a) $\alpha_u = 1.0$　　(b) $\alpha_u = 0.25$

図–5 荷重倍率-全変位成分曲線

の曲線を示す．先ほどと同様に，縦軸に荷重倍率 λ，横軸に変位成分 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$ である．このように，荷重と変位の関係が複雑に増減する曲線となっている．ここでの変位成分は主経路のみを考慮しており，分岐点から枝分かれする分岐経路は考慮されていない．**図 5**(a) から見て分かるとおり，全体的にプロットされた点が多く密になっており，計算量が多くなっているのが分かる．そこで，**図 2** を参考にすると，この解析における弧長は先ほどの解析と同様，変位方向の長さが短くなっていると言える．したがって，α_u を小さくし，弧長の円，または楕円の横幅を大きくする必要があることが分かる．変位方向でのプロットされた点の間隔は約 0.5 であり，この間隔を 4 倍にする．つまり，スケーリングパラメータを 4 分の 1 にすればよいのだから，$\alpha_u = 0.25$ で計算すると効率が良くなると考えることができる．

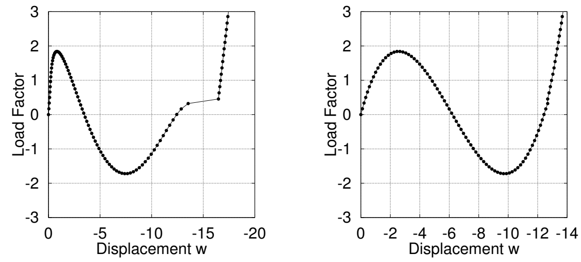
そこで，実際にスケーリングパラメータを $\alpha_u = 0.25$ で計算した際の荷重倍率と全変位成分の関係を**図 5**(b) に示す．弧長を $\Delta S = 0.5$ と一定として，モデルと収束判定は先ほどと同様で計算する．**図 5**(a) と比べると全体的にプロットされた点の間隔が広がり，計算量が減っているのが分かる．また，プロットされた点の間隔を変位方向で見ると，約 2 となっており，先ほどの結果の約 4 倍になっていることが分かる．

次に，スケーリングパラメータを荷重倍率と変位成分の数個に限定して計算した際の荷重倍率と変位の関係を示す．**図 6** に，節点 1 の鉛直荷重と荷重倍率を制御変数とした場合のそれぞれの節点での荷重倍率-鉛直変位曲線を示す．モデル，収束判定などは先ほどと同様である．弧長を $\Delta S = 0.3$ と一定として，荷重倍率に関するスケーリングパラメータを $\alpha_p = 1.0$ とし，荷重作用点の鉛直変位に関するスケーリングパラメータを $\alpha_u = 0.333$ として計算する．このように，荷重と変位の関係が複雑に増減する曲線となっており，節点 2 の曲線ではそれぞれの曲線が非常に接近して，同じような経路をたどっていることがわかる．次に，**図 7** に，節点 2 の鉛直荷重と荷重倍率を制御変数とした場合の場合の荷重倍率-変位曲線を示す．弧長を $\Delta S = 0.2$ と一定として，荷重倍率に関するスケーリングパラメータを $\alpha_p = 1.0$ とし，荷重作用点の鉛直変位の関するスケーリングパラメータを $\alpha_u = 1.0$ として計算する．図から見て分かるとおり，弧長を十分に小さくとり計算したが，計算が途中で他の釣合曲線に飛び移ってしまった．これは，節点 2 の鉛直変位の釣合曲線が，それぞれの曲線が非常に接近しており，また釣合曲線において非常に曲率が大きなところがあり，その場所がちょうど他の釣合曲線上にあるためだと考えられる．他に，スケーリングパラメータや弧長を変えて計算したが，先ほどの折り返しのところで計算がストップしてしまうか，飛び移りを起こしてしまった．



(a) 節点 1　　(b) 節点 2

図–6 制御変数が節点 1 の鉛直変位

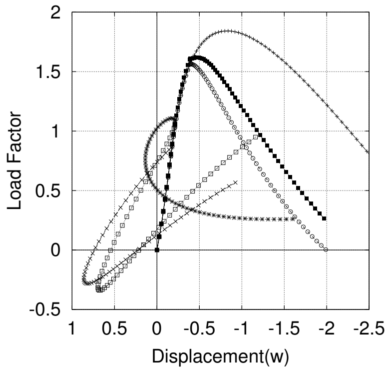


(c) 節点 1　　(d) 節点 2

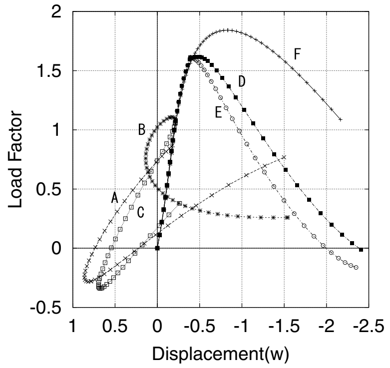
図–7 制御変数が節点 2 の鉛直変位

4.2　トラスドームの分岐経路

図 4 のようなトラスドームの分岐経路の計算を行う．



図–8 弧長一定による分岐経路



図–9 弧長自動設定法による分岐経路

図 8 に弧長を一定とした際の荷重倍率と中央節点の鉛直変位の関係を示す．縦軸に荷重倍率 λ，横軸に中央節点の鉛直荷重 w である．スケーリングパラメータを $\alpha_u = 1.0$ として，弧長を $\Delta s = 0.2$ として計算している．図に示された範囲は，主経路の一つ目のピークまでに生じる分岐点である．次に弧長自動設定法を用いた際の結果を**図 9** に示す．スケーリングパラメータを $\alpha_u = 1.0$ として，最初の 2 ステップ分の弧長を $\Delta s = 0.2$ として計算している．両図から見て分かるとおり，主経路から分岐経路への移行もスムーズに行われ，弧長を一定とし場合と同じような分岐経路の結果となり，A から E までの 5 本が分岐点から枝分かれした分岐経路を表し，F がこの解析における主経路を表している．B と C が同じ分岐点より枝分かれして，D と E が同じ分岐点より枝分かれしているのが分かる．弧長を一定とした結果と比べると，曲率の大きなところでは弧長が小さくなり，曲率の小さなところでは弧長が大きくなっており，全体的な計算量が減っているのが明らかである．したがって，弧長自動設定法を使用した方が効率良く計算できていると言える．

5　結論

本研究において，スケーリングパラメータの設定方法を検討し，また，既往の研究では，主経路にしか対応できなかった弧長自動設定法を分岐経路にも対応できるように拡張した．そして，幾つかの計算例を示し，これらの有効性を確認した．その結論をまとめると次のようになる．

本研究で提案したスケーリングパラメータの設定方法では，荷重に関するスケーリングパラメータを一定として，変位に関するスケーリングパラメータにおける制御変数を全変位成分とし，その全変位成分と荷重倍率による曲線を調べることで，適切なスケーリングパラメータの値を設定することができ，従来の方法に比べてスケーリングパラメータの設定が簡単になり，試行錯誤することも少なくなった．また，既往の研究で考案された弧長自動設定法は主経路にしか適応できなかったが，本研究で分岐経路も計算できるよう拡張し，主経路から分岐経路への移行もスムーズに行われ，分岐経路も安定して計算することができた．

参考文献

1) 岩澤道徳：有限要素法による非線形平衡方程式の数値計算法に関する研究, 長岡技術科学大学大学院修士論文,2001.2

2) 松野 純一：骨組構造物の非線形挙動の数値解析法に関する研究, 長岡技術科学大学大学院修士論文,2002.2

3) 岩崎 英治・松野 純一・長井 正嗣：弧長法のための一反復解法と弧長自動設定法, 応用力学論文集 (土木学会),Vol.5，2002.8.

4) 野口 裕久・久田 俊明：Scale Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発, 日本機械学会論文集 (A 編),58 巻 555 号,pp.2191-2198,1992.11.

5) 藤井 文夫・野口 裕久：固有値解析を必要としない大規模非線形構造系の分岐座屈モードの求め方, 構造工学論文集 (土木学会),Vol.46A,pp.241-250,2000.3.