ケーブル構造の形状決定と構造解析法に関する研究

建設構造研究室　折戸 邦明
指　導　教　官　岩崎 英治
長井 正嗣

1　序　論

ケーブル部材は大空間構造を実現する上で，重要な構造要素である．しかし，はりや柱などの構造要素に比べて，作用する荷重によりその形状が大きく変化する非常にフレキシブルな構造要素であることと，荷重が作用するまでその形状が確定しないという設計や施工，構造解析を行う上で，他の構造要素に比べて大きく異なる性質を持っている．このため，応力解析の他に所定の荷重状態での形状決定が重要な問題になる．

ここで，ケーブル要素の全ポテンシャルエネルギーの汎関数を修正して，少ない自由度で解析可能なケーブル要素が提案されている．そこで，本研究では，更新型ラグランジュの手法を適用し，少ない要素で解析可能なケーブル要素を提案する．

また，ケーブル構造は，圧縮荷重に抵抗できないため，初期張力を導入して，想定される荷重の元で，軸力が喪失しないように設計する．すなわち，ケーブル交点の座標，ケーブル長を決める必要がある．これは形状決定の問題と呼ばれ，通常は構造解析とは別の手法を用いて解かれる．本研究では初期張力や自重の作用下で，ケーブル交点での軸力が等しくなる条件をラグランジュの未定定数法により，構造全体の全ポテンシャルエネルギー式に含めることで，形状決定の問題を解くことができることを提案する．ここで，軸力が等しい状態は，滑車を介してケーブルが接続されていることに等価であるので，初期張力や自重の作用下での交点の座標，ケーブル長を通常の構造解析の手法で求めている．

以上のような特徴を持つ，本研究で提案する要素端部に滑車を有するケーブル要素を用いて，以下のことに関して検討する．

(1) 本研究のケーブル要素は，少ない要素数で解析可能であることを数値計算により示す．

(2) ケーブル要素の剛性方程式を求めるための積分において，積分区間内に特異点のある場合に対応した数値積分方法を考える．

(3) 滑車を有するケーブル要素により，ケーブル構造において軸力一定の元での形状決定ができることを数値計算により示す．

(4) さらに，形状決定後に滑車を固定し，構造解析を行えるようにプログラムを修正し，その有効性を示す．

2　ケーブル要素

いま，ケーブル要素は，ケーブルに沿った単位長さ当たり $\boldsymbol{q}$ の分布荷重と集中荷重 $\boldsymbol{Q}$ が作用して平衡状態にあるものとする．このときのケーブルに生じている軸力を N とする．この状態のケーブルにさらに分布荷重 $\Delta\boldsymbol{q}$ と集中荷重 $\Delta\boldsymbol{Q}$ が作用したときの平衡状態を考える．このときのケーブル要素の平衡状態は，次の汎関数の停留条件として得られる．

$$\Pi_C = \int_0^l \left\{ -\frac{\Delta N^2}{2EA} + [(F_x + \Delta F_x) - (N + \Delta N)] \right\} \mathrm{d}x + \left[\{(\boldsymbol{N} + \Delta\boldsymbol{N}) - n_x(\boldsymbol{Q} + \Delta\boldsymbol{Q})\}^T \Delta\boldsymbol{u} \right]_0^l \tag{1}$$

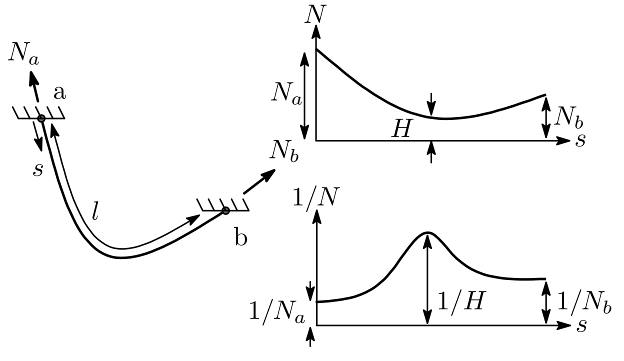
ここで，$(\boldsymbol{N}+\Delta\boldsymbol{N})$ は軸力ベクトルであり，ケーブル要素内の平衡方程式 $(\boldsymbol{N}+\Delta\boldsymbol{N})_{,x} = -(\boldsymbol{q}+\Delta\boldsymbol{q})$ を満足した次式を用いる．

$$(\boldsymbol{N} + \Delta\boldsymbol{N}) = (\boldsymbol{c} + \Delta\boldsymbol{c}) - \int_0^x (\boldsymbol{q} + \Delta\boldsymbol{q}) dx \tag{2}$$

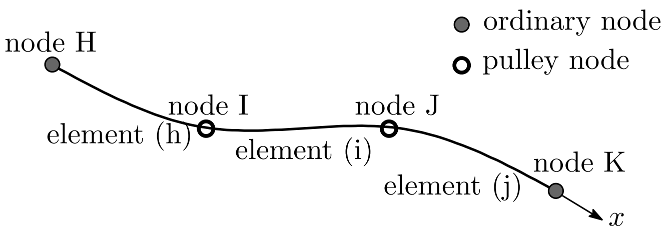
また，増分前後のケーブルの単位接線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}^*$ とする．

3　数値積分

本研究のケーブル要素の剛性方程式の被積分関数には，軸力 N や $N + \Delta N$ の逆数が含まれてい



図–1 自重作用下でのケーブルの軸力とその逆数



図–2 滑車を有するケーブル

る．図 1 には代表的なケーブル部材の自重による軸力とその逆数を示している．両支点間の距離に比べてケーブル長が長い場合には，ケーブル途中での軸力が小さくなり，その逆数の値は，非常に大きな値になる．したがって，数値積分を正確に行うために積分方法に工夫を要する．

このような被積分関数の値が大きく変動する積分方法には，種々の数値積分方法が考案されているが，ここでは，比較的簡単な方法として，軸力の逆数が最大になる点と，変曲点を積分区間の区切りとし，それぞれの積分区間内を通常の数値積分法により求める．

軸力の逆数が極値となる位置と変曲点の位置は以下の条件を満足した点である．

- $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{e} = 0$ となる位置で，軸力の逆数は最大となる．
- 軸力の逆数の変曲点は，$\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{e} = \pm q/\sqrt{3}$ となる位置にある (等分布荷重の場合).

なお，q は分布荷重の大きさであり，$q = \sqrt{(\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q})}$ である．

4　滑車を有するケーブル要素

図–2 のように，ケーブル (h), (i), (j) が節点 I, J に取り付けられた滑車を介して接続されたケーブルの系を考える．滑車を介して接続されたケーブルの軸力は，滑車の摩擦がなければ滑車部で等しくなるので，この条件を汎関数に含めることにより，滑車を表現できる．各ケーブル要素の汎関数を $\Pi_C^{(h)}, \Pi_C^{(i)}, \Pi_C^{(j)}$ とすると，滑車を有するケーブルの汎関数は次のように表される．

$$\begin{aligned}\Pi_C &= \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ &\quad + \Delta\tilde{u}_I\{(N_I^{(h)}+\Delta N_I^{(h)}) - (N_I^{(i)}+\Delta N_I^{(i)})\} \\ &\quad + \Delta\tilde{u}_J\{(N_J^{(i)}+\Delta N_J^{(i)}) - (N_J^{(j)}+\Delta N_J^{(j)})\} \quad (3)\end{aligned}$$

ここで，$\Delta\tilde{u}_I, \Delta\tilde{u}_J$ は，ラグランジュの未定係数であるが，汎関数が停留したときには，それぞれ滑車を有する節点 I と J のケーブルの滑り変位を表している．この変位は，ケーブルに沿った x 軸方向の変位を正としている．また，式中の $(N_I^{(h)}+\Delta N_I^{(h)})$ は，要素 (h) の節点 I での軸力を表している．

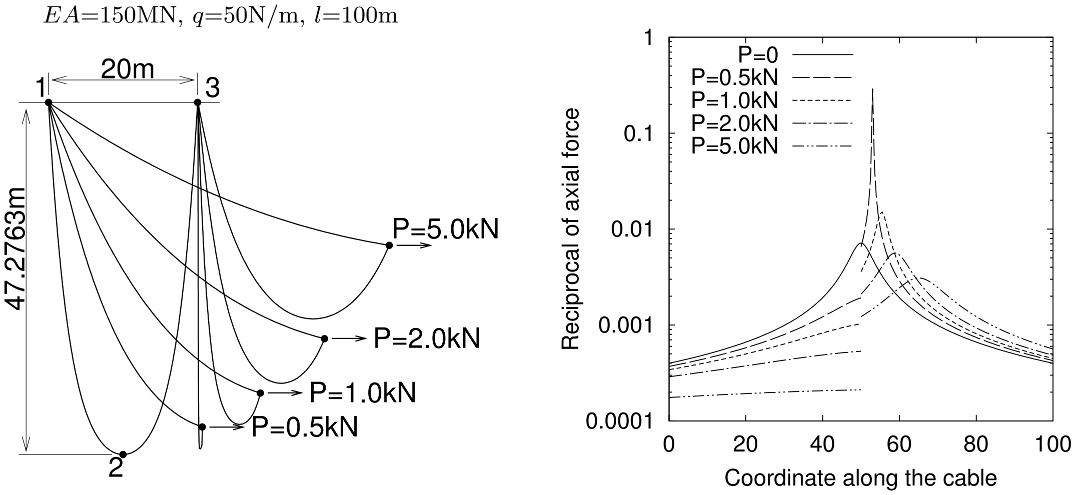
これより，要素の両端に滑車のある一般的な場合のケーブル要素の汎関数は次のように表される．

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta\tilde{u}(N + \Delta N)]_0^l \qquad (4)$$

5　数値計算例

5.1　非常に大きくたわんだケーブルの解析

非常にたわんだ状態のケーブルの計算例を**図 3** に示す．ここでは，伸び剛性 $EA = 150$MN，分布荷重 q=50N/m，ケーブルの無応力長が l=100m の場合について，2 要素でモデル化を行い，分布荷重が作用した状態での形状を計算し，この状態のケーブルの最下点に，さらに水平荷重 P を，0.5kN, 1.0kN, 2.0kN, 5.0kN と順次載荷したときのケーブルの変形状態を解析した結果を示している．この図より P=0.5kN のケーブル形状のように一本のケーブルが弛緩に近い状態になっていても少ない自由度で計算が行えている．ただし，剛性方程式内の積分を正確に行う必要があり，この計算例では，同図 (b) のように P=0.5kN のケーブルが折れ曲がった部分で軸力の逆数が不連続な関数になるため，台形則のような低次の数値積分法を用いて，ケーブル要素を多くの区間に分割して積分する必要がある．この計算例では，45 分割すると解が得られた. しかし，図の結果は，200 分割したと



(a) 変形図　　(b) ケーブル軸力の逆数

図–3 大きくたわんだケーブル

きのものである．ここで，本研究が提案する軸力の逆数が極値と変曲点になる位置において分割する積分方法により，個々の積分区間内を 6 点のガウス積分により数値積分を行うと，解を得ることができた．なお，積分区間内は，節点 1-2 のケーブルが 2 区間，節点 2-3 のケーブルが 4 区間になっている．

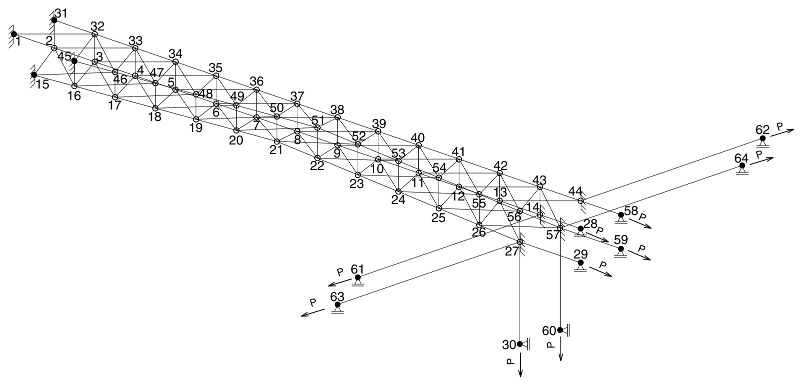
5.2　ケーブルトラス

ケーブルトラスの計算例を**図 4** に示す．ケーブルトラスの初期形状は示しているように，直線部材で表し,中央に近づくにつれて上弦ケーブルと下弦ケーブルの間隔が狭くなっている．このケーブルトラスは，節点 1，14，15，27，31，44，45，57 が固定支持，節点 14，27，44，57 には滑車が取り付けられ，この滑車を固定支持している．ただし，滑車のずれ変位は拘束されていない．節点 28，29 と 58，59 は，節点 14，27 と 44,57 での主ケーブルのずれ変位を許容させるためと，構造全体の反力を与えるための節点である．また，節点 30，60，61 から 64 はハンガーケーブルのずれ変位と反力を与えるための節点である．ケーブルトラス内の節点 2 から 13 と節点 16 から 26，および，節点 32 から 43 と節点 46 から 56 は，滑車内を主ケーブルとハンガーケーブルの両方が自由に滑り変位可能な状態になっている．すなわち，このトラスケーブルは 4 本の主ケーブルと 6 本のハンガーケーブルが結合されることなく滑車により形成されている．なお，このケーブルのヤング係数は E=140GN/m^2，主ケーブルの断面積は，$A = 758.0$mm^2，ハンガーケーブルの断面積は，39.4mm^2 である．

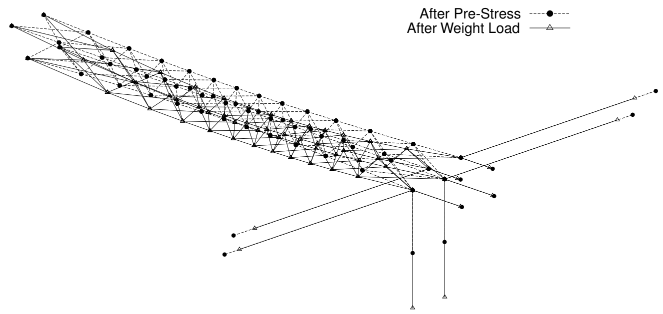
図 5(a) は，節点 30，60，61 から 64 に取り付けたローラー支承に初期張力として集中荷重 P を作用させ，さらに，ケーブルトラスの自重を作用させたときの変形図である．このとき，初期張力による変形図を破線，自重による変形図を実線で示す．

ここで，プレストレスとケーブルトラス中央部のたわみの関係について調べる．**図 5**(b) は，横軸にプレストレスの大きさ，縦軸に，初期形状の座標位置を基準として，下弦ケーブル中央の節点 21 の変位を示したものである．プレストレスの増加によって，ケーブルトラスのたわみが抑制され，その抑制量は，増加にしたがって少なくなっていくことが分かる．

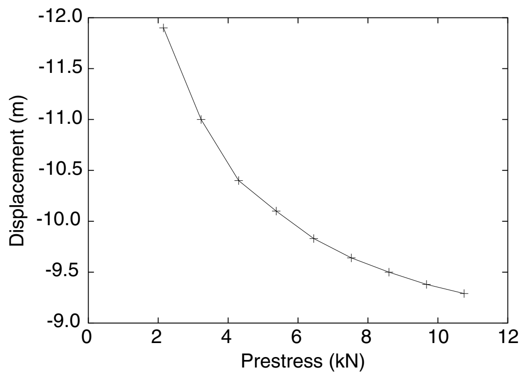
この計算例のように，全ての節点が滑車で構成されているようなケーブル構造を考えると，軸力がケーブル全体に均等に作用するので，想定外の荷重によるケーブルの弛緩を避けることができる．また，プレストレスに対するたわみ抑制の効果を調べることにより，例えばスパンに対するたわみの量が制限されている場合に，どれくらいの初期張力を与えれば良いかを知ることができる．



図–4 ケーブルトラス



(a) 等分布荷重による変形



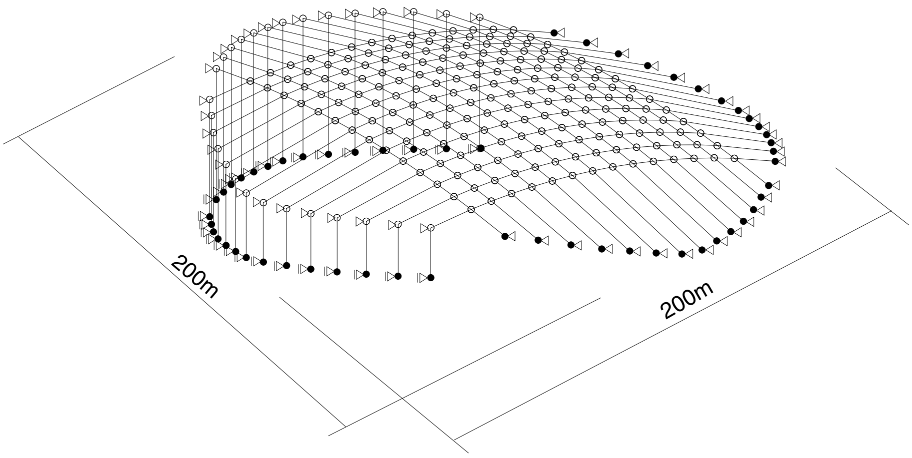
(b) プレストレスとたわみの関係

図–5 滑車を有するケーブルトラス

5.3　ケーブルドーム

図 6 のようなケーブルドームの解析を行う．このケーブルドームの平面形状は対角の長さが 200m の楕円形である．このドーム全体が 16/100 の勾配を持つ．ケーブルはドーム面の対角方向にそれぞれ 14 本，計 28 本とし，ケーブル間隔を 8.5m とする．また，このケーブルドームに用いれられているケーブルの断面諸元は，直径 80mm の構造用スパイラルロープ（1×169：破断荷重 5429kN）を使用しており，断面積 A を 3450mm^2，ヤング係数を 140.0GPa として計算している．ここで，このケーブルドームに初期張力を与えるため図中で $\underline{\triangle}$ と示している節点を鉛直方向にだけ移動可能なローラー支承とし，鉛直荷重 P=60kN を作用させる．そのときの変形図を**図 7**(a) に示す．この状態で，28 本全てのケーブルには張力 58kN が作用している．さらに，このケーブルドームは実際，膜を張り空気圧によって屋根を持ち上げるケーブル補強空気膜構造である．ここでは，空気圧の代わりに上向きの等分布荷重 q=315.0N/m を作用させている．比較として節点を剛結したケーブルドームの解析を**図 7**(b) に示す．

ここで，節点を滑車とした場合と節点を剛結した場合の軸力分布を調べる．**図 8** は，ケーブルドーム中央部において交差する x 方向と y 方向 2 本のケーブルの滑車有りと節点剛結についての軸力分布を示す．**図 8**(a) の滑車有りの軸力分布は，滑らかな曲線を示している．つまり，ケーブルドームに，一様な初期張力が作用していることに他ならない．また，節点を剛結した軸力分布である**図 8**(b) を見てもらうと，節点間において軸力が等しくないため図のようなグラフを示している．滑車有りの場合に比べて，大きな軸力がケーブルに作用していることがいえる．



図–6 ケーブルドーム

以上のことから，節点を滑車とすることにより，ケーブルドームにほぼ均一な軸力が伝わるようなケーブル長を得ることができたことにより，形状決定をすることができたといえる．ここで，さらに本研究の目的でもある形状決定後の解析を行う．まず，形状決定のために取り付けられた滑車の滑り変位を拘束，つまり節点を剛結する．その後荷重を増加することにより，ケーブル構造がどのような形状を示すかを調べる．ここで例として，形状決定後に先ほどのケーブルドームに空気圧として与えた上向きの等分布荷重が 200%の場合について解析する．空気圧が 200%の場合についての形状を**図 9**(a) に示す．空気圧が 200%になったことによる形状の変化はほとんど見られなかった．

ここで，空気圧が 200%になったことによって，ケーブルドームの軸力がどのように変化しているかを調べる．**図 9**(b) は，ケーブルドーム中央部において交差する x 方向と y 方向 2 本のケーブルの軸力分布を示す．形状決定が行われていることによって，空気圧の変化に対しても軸力分布は滑らかな曲線を示している．

6 結 論

数値計算により，以下のような結論を得た．

(1) 剛性方程式の積分を正確に行えば，少ない自由度で，大きくたわんだ状態のケーブルの解析が行えることが分かった．また，直線ケーブル要素による解析では，一つの要素で大きなケーブル長を扱えないことから，滑車部での滑り変位に制限が加えられるが，本報告でのケーブル要素にはこのような滑り変位の制限が緩和される．

(2) 積分区間内に特異点のある積分を，被積分関数である軸力の逆数が最大になる点と変曲点で自動的に積分区間を分割する方法により，効率的に正確な積分結果を得ることができた．

(3) 軸力一定の元での形状決定に対して，滑車を有するケーブル要素を用いることで対応できることを数値計算により，その妥当性と有効性を示した．また，初期張力を調整することにより，ケーブル構造のたわみを知ることができ，たわみが制限されている形状決定にも有効であることが分かった．

参考文献

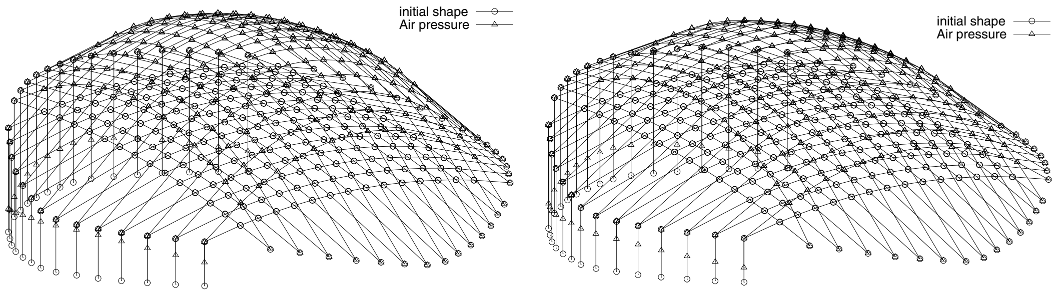
1) 中西　宏，波田凱夫：曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, 第 318 号, pp.41-50, 1982.

2) 謝　　旭, 伊藤　学, 山口広樹：Updated Lagrangian 手法に基づく柔ケーブルの非線形解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.427-434, 1995 年 3 月.

3) 林　　正, 岩崎英治, 山野長弘, 時　譲太：ハイアラーキ要素によるケーブル構造の有限変位解析, 土木学会論文報告集, No.668/I-54, pp.207-216, 2001.

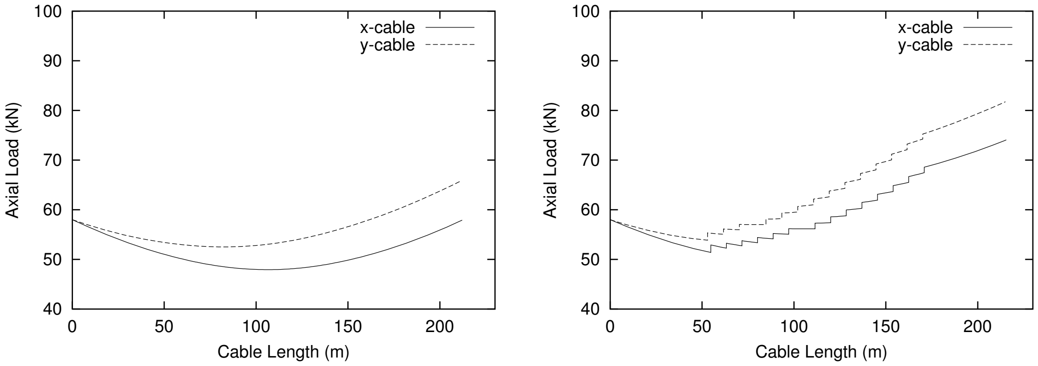
4) 阿井正博, 西岡　隆, 奥村敏恵：ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, 第 260 号, pp.17-32, 1977.

5) 後藤茂夫：柔ケーブル材の接線剛性方程式について, 土木学会論文報告集, 第 270 号, pp.41-49, 1978.



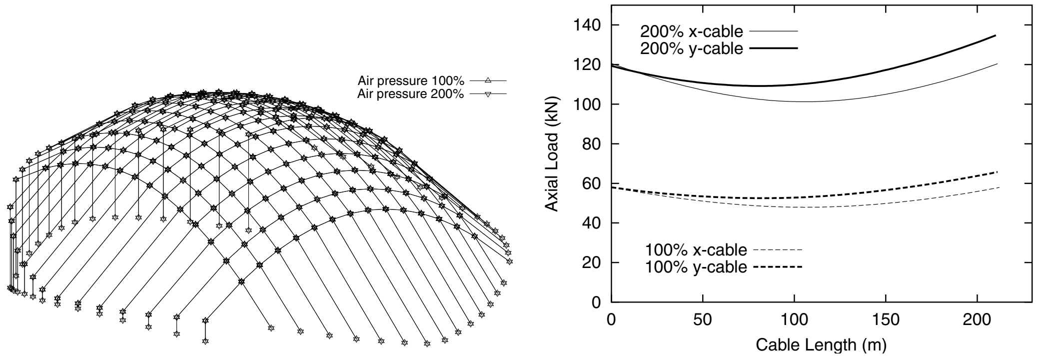
(a) 節点を滑車としたときの変形　　(b) 節点を剛結としたときの変形

図–7 ケーブルドームの変形



(a) 節点を滑車としたときの軸力分布　　(b) 節点を剛結としたときの軸力分布

図–8 ケーブルドームの軸力分布



(a) 形状決定後，等分布荷重を加えたときの形状　　(b) 形状決定後，等分布荷重を加えたときの軸力分布

図–9 ケーブルドームの形状決定後の解析

6) 真柄栄毅, 国田二郎, 川股重也：混合法によるケーブルネットの解析 その (2) 幾何学的非線形問題の厳密解, 日本建築学会論文報告集, 第 220 号, pp.35-45, 1974.

7) B. M. McDonald and A. H. Peyrot : Analysis of Cable Suspended in Sheaves, *J. Struct. Engng., ASCE*, Vol.114, No.3, 1988.

8) M. Aufaure : A Finite Element of Cable Passing Through a Pulley, *Computers & Structures*, Vol.46, No.5, pp.807-812, 1993.

9) 岩崎英治, 林　　正：修正された変分原理による空間曲線材の有限変位解析, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.367-380, 1991.