

# 各種境界条件を考慮した土供試体の分岐局所化現象の数値解析

建設設計研究室  
指導教官

佐藤 啓介  
鳥居 邦夫  
宮木 康幸

## 1. はじめに

地盤材料の平面ひずみ供試体における圧縮せん断変形挙動では、様々な局所変形モードを示すとともに、漸次的にモードが変化して破壊に至る。これに伴い供試体のピーク強度も変動する。これは地盤供試体に初期状態から含まれている(材料的な)不均一さや(幾何学的な)形状の微小なひずみなどが次第に局所変形へと進展し、最終的な破壊に至るためである。この現象は弾塑性分岐現象により支配されており、分岐荷重や発生する分岐モードは、供試体の形状によって様々である。また、山川ら<sup>1),2)</sup>による研究では、砂の三軸圧縮試験帯の変形特性は、寸法・形状の影響を大きく受けており、様々な局所化モードを呈し、それに伴い、強度や変形特性も大きく変動するとの報告がなされている。

本研究では、圧縮せん断試験時の供試体形状効果による供試体への影響を調べることで、実験時に発生する破壊形態のばらつき傾向を分岐現象という観点から調べることを目的とした。その手法としては、弾塑性有限要素法を用いた数値解析的な拡散型分岐解析を行い、分岐による変形モードの変動(幾何学的非線形性)から、分岐荷重や分岐モードに対する形状効果や境界条件の違いが及ぼす供試体への影響を調べた。

## 2. 有限変形弾塑性分岐解析の定式化

### 2.1 有限変形・弾塑性境界値問題

有限変形を考慮した一般的な弾塑性境界値問題の定式化についてまとめる。本研究では、運動力学的に厳密とされる変形勾配の乗算型分解  $F = F^e \cdot F^p$  と超弾性構成式に基づく定式化を採用する。滑らかな境界  $\partial B$  を有する閉集合の領域  $B \subset \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$  ( $n_{\text{dim}} = 1, 2, 3$ ) を考える。  $B$  は物体ないの参照配置を表し、  $n_{\text{dim}}$  は領域の次元、  $\mathcal{R}$  は実数の空間である。このとき、空間表示(現配置参照型)の弱形式のつり合い方程式は、

$$\begin{aligned} g_{\varphi_t}(\tau; \eta) &= \int_B \tau : (\eta \otimes \nabla_{x_t}) \frac{dv}{J} \\ &\quad - \int_B \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta \frac{dv}{J} - \int_{\partial_t B} \bar{\mathbf{T}} \cdot \eta \, ds \\ &= 0, \quad \forall \eta \in \nu_{\varphi_t} \end{aligned} \quad (1)$$

と与えられる。ここで、  $\varphi(\mathbf{B})$  は変形写像、  $J = \det \mathbf{F}$  は変形勾配  $F = \varphi \otimes \nabla_X$  のヤコビアン、  $\tau$  は Kirchhoff 応力、  $\rho_0$  は質量密度、  $\mathbf{B}$  は物体力、  $\bar{\mathbf{T}}$  は  $\partial_t B$  上で与えられる表面力、  $\eta$  は斉次境界条件を満たす可容変位変分の試験関数であり、その空間  $\nu_{\varphi}$  は、

$$\begin{aligned} \nu_{\varphi B} &= \left\{ \eta : \varphi(B) \rightarrow \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \eta \in [W^{1,p}(B)]^{n_{\text{dim}}}, \right. \\ &\quad \left. \eta(\varphi(\mathbf{X})) = \mathbf{0} \text{ for } \mathbf{X} \in \partial_{\varphi} B \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、  $\partial_{\varphi} B$  は変位境界、  $W^{1,p}$  は一階微分までが  $L^p(B)$  に属する Sobolev 空間である ( $p > 2$ )。つり合い式 (1) は変位に関して非線形であるため、有限の大きさを持つ増分変位  $\Delta u$  を用いて線形化すると、

$$\begin{aligned} \int_B [\mathcal{L}_{\Delta u} \tau_t + (\Delta u \otimes \nabla_{x_t}) \cdot \tau_t] : (\eta \otimes \nabla_{x_t}) \frac{dv}{J} \\ + g_{\varphi_t}(\tau_t; \eta) = 0 \quad \forall \eta \in \nu_{\varphi_t} \end{aligned} \quad (3)$$

左辺第 2 項の  $g_{\varphi_t}(\tau_t; \eta) \neq 0$  は不つり合い力(残差力)に相当し、  $g_{\varphi_t} = 0$  となるつり合い状態の解を求めることとなる。ここで、  $\mathcal{L}_{\Delta u} \tau_t$  は Kirchhoff 応力の  $\Delta u$  に関する Lie 微分である。増分型の弾塑性構成式を

$$\mathcal{L}_{\Delta u} \tau_t = \bar{c}_t^{\text{ep}} : [\Delta u \otimes \nabla_{x_t}] \quad (4)$$

として、式 (3) に代入し、有限要素離散化を行い、増分ステップ毎に反復的に解く。ここで、  $\bar{c}_t^{\text{ep}}$  は増分型の 4 階の consistent 接線係数テンソルである。

### 2.2 弾塑性有限ひずみ理論と応力評価アルゴリズム

#### (1) 超弾性構成式と塑性発展方程式

弾塑性材料の自由エネルギー関数  $\Phi$  は弾性ポテンシャル  $\mathcal{W}(b^e)$  と塑性ひずみ硬化ポテンシャル  $\mathcal{H}(\xi)$  を用いて、

$$\Psi(b^e, \xi) = \mathcal{W}(b^e) + \mathcal{H}(\xi) \quad (5)$$

として与えられるものとする。ここで、  $b^e = F^e \cdot F^{eT}$  は弾性の左 Cauchy-Green 変形テンソル、  $\xi$  は塑性ひずみ硬化に関するパラメータである。このとき超弾性構成式が、

$$\tau = 2 \frac{\partial \Psi(b^e, \xi)}{\partial b^e} \cdot b^e = 2 \frac{\partial \mathcal{W}(b^e)}{\partial b^e} \cdot b^e \quad (6)$$

また、塑性ひずみ硬化則が、

$$q = - \frac{\partial \Psi(b^e, \xi)}{\partial \xi} = - \frac{\partial \mathcal{H}(\xi)}{\partial \xi} \quad (7)$$

と与えられる。ここで、  $q$  は塑性ひずみ硬化に関する応力のオーダーを持つ内部変数である。さらに、本研究では、弾塑性応答が最大塑性散逸の原理に従い、散逸不等式より、流れ則および発展則には関連型を用いるとそれぞれ、

$$- \frac{1}{2} (\mathcal{L}_v b^e) \cdot b^{e-1} = \lambda \frac{\partial \phi(\tau, q)}{\partial \tau} \quad (8)$$

$$\dot{\xi} = \lambda \frac{\partial \phi(\tau, q)}{\partial q} \quad (9)$$

と導かれる。ここで、  $\phi(\tau, q)$  は降伏関数、  $\lambda$  は塑性 consistency パラメータ、  $\mathcal{L}_v b^e$  は  $b^e$  の変位速度  $v = \dot{\phi}$  に関する Lie 微分である。これに、Kuhn-Tucker 形式の負荷・除荷条件

$$\lambda \geq 0, \quad \phi(\tau, q) \leq 0, \quad \lambda \phi(\tau, q) = 0 \quad (10)$$

と塑性 consistency 条件

$$\lambda \dot{\phi}(\tau, q) = 0 \quad (11)$$

が課される．

## (2) Drucker–Prager の降伏条件

本研究では、静水圧依存型の弾塑性モデルである Drucker–Prager の降伏条件を用いて応力評価を行った．超弾性方程式 (5) について材料の等方性を仮定すると、弾性ポテンシャル  $\mathcal{W}$  は弾性の主ストレッチ  $\lambda_A^e (A = 1, 2, 3)$  の関数であり、対数ひずみ  $\varepsilon_A^e = \log(\lambda_A^e)$  を用いた Henky モデル

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e) &= \frac{1}{2} \lambda [\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e]^2 \\ &\quad + \mu [(\varepsilon_1^e)^2 + (\varepsilon_2^e)^2 + (\varepsilon_3^e)^2] \end{aligned} \quad (12)$$

を用いる．ここで、 $\lambda > 0, \mu > 0$  は Lamé 定数である．これにより、Kirchhoff 応力の主応力が、

$$\tau_A = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_A^e} = \lambda [\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e]^2 + 2\mu \varepsilon_A^e, \quad (13)$$

また、Drucker–Prager の降伏関数は、

$$\begin{aligned} \phi(\tau, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\|\text{dev}[\tau]\| + g(\bar{\tau})] - [\bar{\tau}_{y0} - q(\xi)] \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

を用いる．ここで、 $\bar{\tau} = \frac{1}{3} \text{tr}[\tau]$  および  $\text{dev}[\tau] = \tau - \bar{\tau} \mathbf{1}$  はそれぞれ Kirchhoff 応力  $\tau$  の等方成分、偏差成分、 $\|\text{dev}[\tau]\| = \sqrt{\text{dev}[\tau] : \text{dev}[\tau]}$  は偏差応力のノルム、 $\bar{\tau}_{y0}$  は初期降伏応力である．また、 $g(\bar{\tau})$  は静水圧の塑性への影響を表す関数であり、

$$g(\bar{\tau}) = \beta_\phi \bar{\tau} \quad (15)$$

という形式を用いることとすると、定数  $\beta_\phi$  は主応力空間における Drucker–Prager の降伏面による円錐の頂点に対応する．これらのパラメータ  $\bar{\tau}_{y0}, \beta_\phi$  については Mohr–Coulomb の粘着力  $\bar{c}$  および摩擦角  $\bar{\theta}$  により、

$$\bar{\tau}_{y0} = \frac{6\bar{c} \cos \theta}{\sqrt{3}(3 + A \sin \theta)}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_\phi = \frac{6 \sin \bar{\theta}}{\sqrt{3}(3 + A \sin \theta)} \quad (16)$$

と決定できる ( $-1 \leq A \leq 1$ )．ここで、 $A$  は定数であり、 $A = -1, 1$  のときにはそれぞれ、Drucker–Prager 降伏面は 3 次元応力空間において Mohr–Coulomb 降伏面の外側、内側の頂点を通る包絡線となる．

実際の数値解析では、各荷重ステップの反復過程において数値積分点での応力評価を行うことになるが、これについては後退型 return mapping 法を用いて厳密に降伏面上に位置する応力を求めるとともに、変形テンソルの弾性部分  $b^e$  をステップ毎に保存することで塑性変形履歴を更新する手続きを取る．

## 2.3 弾塑性分岐条件と数値分岐解析手法

### (1) 弾塑性境界値問題における分岐発生条件

本研究では、初期不整を導入した疑似分岐解析ではなく、完全系の分岐解析を行う．基本経路上の分岐点と分岐モードを求め、分岐経路への切り替え操作をおこなう．ここでは、分岐点の判定条件について述べる．この条件は本研究

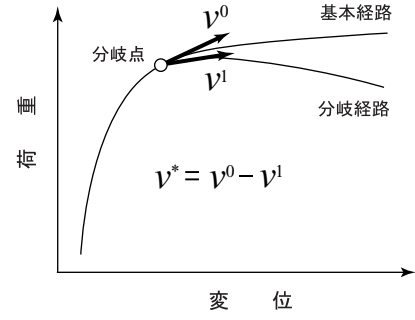


図-1 解の分岐の模式図

で対象とする地盤材料だけでなく、他の弾塑性材料にも構成式を問わず適用可能である．弾塑性境界値問題における解の唯一性の十分条件は、Hill により議論されている．Hill(1958) の弾塑性分岐条件について速度形式の現配置表記で書くと、

$$\begin{aligned} I_t &= \int_{\varphi_t(B)} [(\mathcal{L}_v \tau_t) : \text{sym}[\mathbf{v}^* \otimes \nabla \mathbf{x}_t]] \\ &\quad + \tau : \{(\mathbf{v}^* \otimes \nabla \mathbf{x}_t)^T \cdot (\mathbf{v}^* \otimes \nabla \mathbf{x}_t)\} \frac{dv}{J} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

で表される．ここで、 $\mathbf{v}$  は変位速度、上付き添字 (\*) は、基本経路と分岐経路にそれぞれ対応する変位速度場の相違する 2 つの解  $\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1$  が存在すると仮定した場合に、各々に対応する量の差を取ったことを示す (図-1)．また、弾塑性材料から除荷の可能性を排除した線形比較体を仮定し、 $\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1$  が共に除荷が生じずに、塑性負荷が持続するものとする、式 (4) を速度型に書き換えた  $\mathcal{L}_v \tau_t = \mathbf{c}_t^{\text{ep}} : [\mathbf{v}^* \otimes \nabla \mathbf{x}_t]$  を用いると式 (17) は、

$$\begin{aligned} I_t &= \int_{\varphi_t(B)} [(\mathbf{v}^* \otimes \nabla \mathbf{x}_t) : \mathbf{c}_t^{\text{ep}} : (\mathbf{v}^* \otimes \nabla \mathbf{x}_t)] \\ &\quad + \tau : \{(\mathbf{v}^* \otimes \nabla \mathbf{x}_t)^T \cdot (\mathbf{v}^* \otimes \nabla \mathbf{x}_t)\} \frac{dv}{J} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

という各経路に対応する速度型弾塑性構成式となる．ここで、 $\mathbf{c}_t^{\text{ep}}$  は速度型の弾塑性接線係数で、塑性 consistency パラメータの増分を  $\Delta \gamma = 0$  としたものに等しい．さらに、変位速度  $\mathbf{v}^*$  を変位増分  $\Delta \mathbf{u}^*$  として、式 (18) を有限要素離散化すると、 $I_t = \Delta \mathbf{u}^* \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^* = 0$  となる．接線剛性マトリックス  $\mathbf{K}$  が特異性条件

$$\det \mathbf{K} = 0 \quad (19)$$

を満たすときに非自明解  $\Delta \mathbf{u}^* = \Delta \mathbf{u}^1 - \Delta \mathbf{u}^0 \neq 0$  が存在する．従って、式 (19) を判定することにより、拡散型分岐モードの分岐点 (あるいは荷重極限点) を求めることができ、ゼロ固有値に対応する固有ベクトル  $\Delta \mathbf{u}^*$  が分岐モードとなる．

### (2) 数値解析における分岐条件の判定法と経路切り替え手続き

前節で述べたように、分岐点の判定を行うためには、各つり合い点において接線剛性マトリックス  $\mathbf{K}$  の固有値を求め、ゼロ固有値が発生する点をモニタリングする必要がある．また、分岐経路への切り替えを行う際には、 $\mathbf{K}$  のゼロ固有値に対応するクリティカルな固有ベクトル、すなわち分岐モードを求める必要がある．

藤井,野口<sup>3)</sup>は,線形化つり合い式を解く際に行う $K$ の三角分解( $LDL^T$ 分解)の結果から近似固有ベクトル<sup>4)</sup>を抽出する手法を提案している.この手法によれば,連立方程式の解法に僅かに付加的な手続きを加えるだけで,近接・多重分岐点であっても個別に分岐モードを求めることができる.弾塑性分岐は,Hill and Hutchinson<sup>5)</sup>も指摘しているように,最初に分岐発生点を越えると,様々なモードの分岐が多数集積して発生する.従って,この方法は弾塑性分岐解析に対して大変有用である.そこで,本研究の分岐解析ではこの手法を用いて固有値解析を行うこととする.

つり合い点で分岐条件が判定された場合には,通常の解法を続ければ基本経路追跡が行われるが,分岐経路を追跡する場合には経路切り替え手続きをする必要がある.数値解析における分岐経路への切替え手続きは以下の通りである.各荷重ステップのつり合い点において $K$ の固有値の符号を確認し,一つでもゼロのものがあり,かつ荷重パラメータ(ここでは軸荷重)の極大・極小点(荷重極限点, limit point)でなければ,このつり合い点は分岐点と判定される.次に,分岐点においてゼロ固有値に対応するクリティカルな固有ベクトル(分岐モード)を前述の方法を用いて求め,これをスケールしたものを変位予測子の初期値として反復計算を開始し,得られた収束点が分岐経路上のつり合い点となる.経路切替えを上手く行うためには,このスケール法は弾塑性分岐解析では特に重要である.Hillの線形比較体による議論に従い,分岐発生の瞬間での除荷発生の可能性を排除するため,分岐モードの変位予測子を変位増分として,何回か試行的に数値積分点で応力評価を行い,全ての積分点で除荷が発生しないような最大のスケール係数を用いることにより,効率的に経路切替えができる.

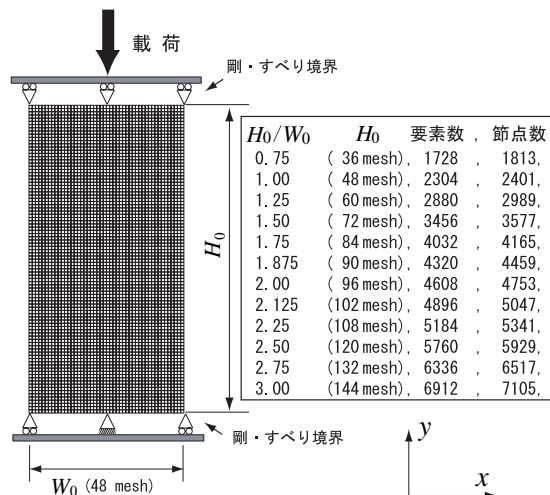


図-2 有限要素解析モデル

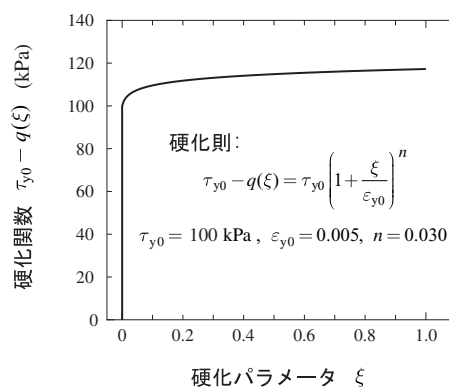


図-3 硬化関数

### 3. 平面ひずみ供試体の数値分岐解析

#### 3.1 供試体の形状効果による影響

解析モデルの形状比  $H_0/W_0$  を様々に変動させて弾塑性分岐解析を行い,矩形供試体の形状効果が分岐荷重や分岐モードに及ぼす影響について調べた.

##### (1) 解析モデルと境界条件

数値解析に使用した有限要素解析モデルを図-2に示す.平面ひずみ状態を仮定し,幅  $W_0$ ,高さ  $H_0$  の矩形供試体の上端に一樣な  $y$  方向の変位が与えられるものとする.上下端面の拘束条件については,剛体移動を止めるために下面中央部の1点のみを拘束して,それ以外は  $x$  方向の変位を自由とした(端面摩擦なし).また,メッシュ分割は  $x$  方向を一定とし, $y$  方向を変動させた.供試体形状比は  $H_0/W_0 = 0.75 \sim 3.00$  の範囲とする.

##### (2) 材料定数と硬化関数

本解析で用いた材料定数と硬化関数を示す.超弾性構成式(13)中の Lamé 定数は  $\lambda = 11.54 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 7.69 \text{ MPa}$  とした.また,本研究ではひずみ硬化モデルは用いないこととし,式(14)中の塑性ひずみ硬化関数  $q(\xi)$  は,

$$q(\xi) = -\left[ \hat{\tau}_{y0} \left( 1 + \frac{\xi}{\hat{\epsilon}_{y0}} \right)^n - \tau_{y0} \right] \quad (20)$$

という  $n$  乗硬化則の形式のひずみ硬化モデルを用いた.ここで,  $\hat{\tau}_{y0}$ ,  $\hat{\epsilon}_{y0}$ ,  $n$  はそれぞれ降伏応力,降伏ひずみ,塑性

硬化則に関する材料パラメータである.このときの硬化関数は図-3のようになる.

##### (3) つり合い経路と分岐モード

3.1.(1), (2) の解析条件において弾塑性分岐解析を行った.その一例として,供試体形状比  $H_0/W_0 = 2.00$  における解析結果を以下に示す.図-4はつり合い経路(基本経路および分岐経路)であり,図中の括弧付きの数字は対応する分岐点の番号である.分岐点番号とは基本経路上の解析過程で分岐点を確認された順の番号とする.この解析の結果,一樣変形が持続している基本つり合い経路上に, ( ) で示すゼロ固有値の重複度が1である7個の分岐点を確認された.この分岐発生位置は軸ひずみが非常に近い荷重で近接(集積して発生)していることが分かる.硬化・軟化の度合いは図で見る限りでは,低次の分岐点ほど荷重低下の度合いが大きい傾向があり,分岐後の経路における荷重は,基本経路よりもかなり低くなっている.この傾向には他の供試体形状比からも同様の結果が得られた.また,図-5は,各分岐経路ごとの分岐モードと,軸ひずみ ( $F/W_0$ ) が20% 付近となったときの变形とせん断ひずみの度合いを捉えたものを分岐点番号順に並べたものである.ここで,図中左側の分岐モードは  $y$  軸に関して対称・反対称の拡散型モードであり,変形モードが分かり易いようにスケールしてある.また,せん断ひずみのコンターは偏差ひずみを表したものである.

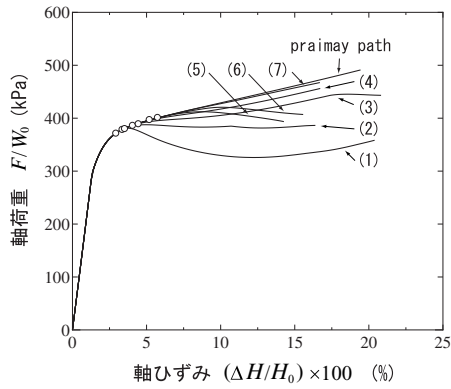


図-4 つり合い経路 (基本経路, 分岐経路)

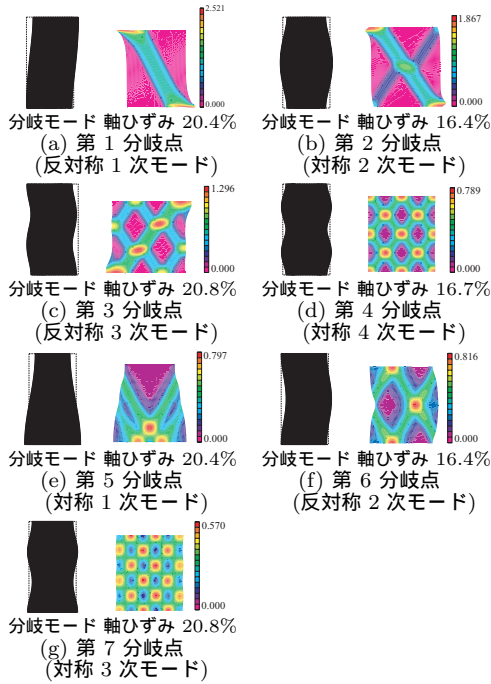


図-5 分岐モードとせん断ひずみ

(4) 分岐荷重・分岐モードに対する供試体形状比の影響

形状比を変動させた平面ひずみ供試体に対して弾塑性分岐解析を行ったときに発生した分岐モードを各系列とした形状比と分岐荷重の関係を図-6 および 図-7 で示した。ここで、プロットされている各点は、形状比ごとの各分岐モードの発生荷重を表しており、同じ分岐モードを線で結んだものである。図より、形状比の変化に対し、各分岐モードの分岐荷重は極値を持つ変動を示すことが分かる。また、各形状比において分岐荷重が最も低い分岐モードは比較的低次のモードに限られており、図-7 中の  $H_0/W_0 = 2.00 \sim 3.00$  における反対称 1 次モードでは特に顕著に現れている。そのため、実験における供試体の破壊形態は、比較的 low 次分岐モード (低い分岐荷重) で現れやすいと言える。これは、実際の実験においては材料の不均一性 (材料の不整) や形状の歪み (幾何学的な不整) による影響により、変形の初期段階から変形の局所化が誘発され、高次の分岐モードが発生する前に、低次の分岐モードに類似する破壊形態が現れるものと考えられるためである。

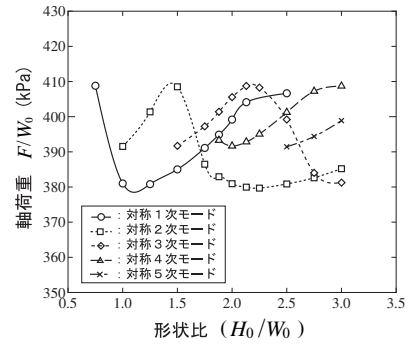


図-6 分岐モード毎の分岐荷重と形状比の関係

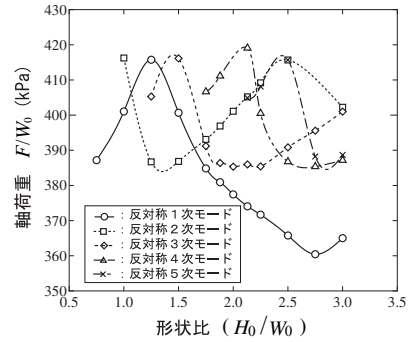


図-7 分岐モード毎の分岐荷重と形状比の関係

3.2 端面境界条件による影響

本節では平面ひずみ供試体の境界における変位の拘束条件を変化させて弾塑性解析を行い、発生する破壊形態および荷重-ひずみ関係についての検討を行った。

(1) 解析モデルと境界条件

本節において数値解析を行った解析モデルを図-8 に示す。また、解析を行う際の基本的なパラメータ等の設定は、3.1.(2) に従うものとし、初期の有限要素メッシュは均等分割の 4 節点アイソパラメトリック要素を用いた。平面ひずみ供試体形状には、幅  $W_0$  (24mesh)、高さ  $H_0$  (48 mesh)、要素数 1152、節点数 1225 の形状比  $H_0/W_0 = 2.00$  の矩形供試体とした。

荷重条件は全ての解析パターンにおいて平面ひずみ状態を仮定し、上端に一樣な  $y$  方向の変位が与えられるものとする。

拘束条件に関する解析パターンは、model1 から model4 までの 4 通りを行い、その拘束条件については以下に記す。model1 は上下端面の拘束は剛体移動を止めるために下面中央部の 1 点のみを拘束して、それ以外は  $x$  方向の変位を自由とした。model2 は上下端面全てを拘束し、上下端面とも  $x$  方向の変位も許さないものとした。これは、端面摩擦によって変位が完全に拘束された条件となる。model3 は  $x$  方向の変位を止めるために上下面中央部のそれぞれ 1 点を拘束して、それ以外の  $x$  方向の変位を自由とした。model1 との違いは、上側のキャップが  $x$  方向にスライドできない点である。model4 は下端面の拘束を固定端として、上端面は荷重載荷面を拘束して形状は変化しないが、 $x$  方向の変位は自由とすることで、摩擦拘束しながら、キャップはスライド可能としている。

このした各種の境界条件の下では、分岐モードの発生が抑制されるものである。例えば、model3 では反対称 1 次モードは生じ得ない。一方、model2 では、特に分岐を発

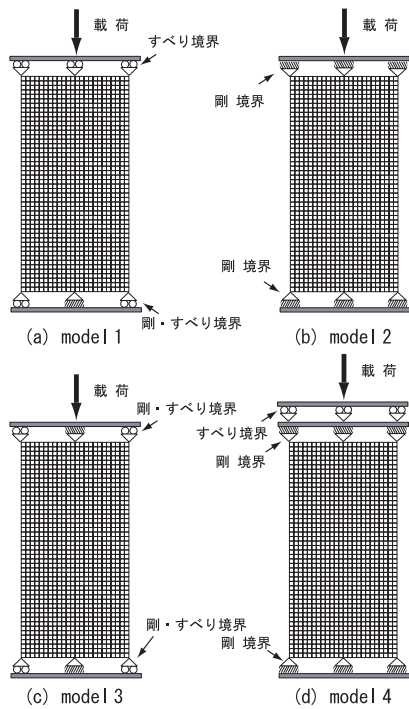


図-8 端面境界条件の異なる解析モデル

端とせずに始めから不均一変形が進展し、対称 2 次モードに類似した変形形態となる。

## (2) つり合い経路に対する端面境界条件の影響

上述の条件における弾塑性解析によって得られた各供試体モデルごとのつり合い経路を図-9 に示す。ただし、特に分岐解析は行っていない。また、図-10 は解析モデルにおけるせん断ひずみの進展度合いを表したものである。

図-9 より、model1 と model3 は同じつり合い経路を辿っていることが分かる。これは、供試体モデルが一樣変形を続けるために必要な上下端面における  $x$  方向の変位が拘束されていないために、双方とも基本経路から逸脱することなく変形が進展するためである。そのことは、図-10 においてひずみの局所化が発生せずに四角形の形を保ったまま一樣変形が進行していることから確認される。

model2, model4 におけるつり合い経路は、model1, 3 とは明らかに異なる経路を辿っている。また、図-10 を見たときに、変形の進み方が明らかに異なることから確認できる。これは、 $x$  方向の変位が拘束されているために、供試体モデルが一樣変形することができず、一樣変形の基本経路を辿ることができず、供試体の中央部にひずみが集中し、対称 2 次モードに似た破壊形状となる。これは、上下端面が拘束されているために始め供試体中央部にひずみが集中が起こるためである。さらに、軸ひずみが 10% 付近まで進展した時、model4 においてモードジャンプが発生している。これは、供試体上端面の  $x$  方向変位は拘束されておらず、キャップのスライドが自由なので、あるところで左右非対称な変形へ遷移し、やがて塑性によるひずみの集中が始まり、供試体を 2 つに分断するような大きなせん断帯が発生する。このような現象は、同様の拘束条件を用いた地盤材料の圧縮せん断試験において確認されている。

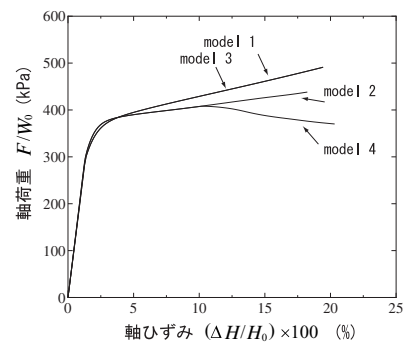


図-9 端面境界条件によるつり合い経路への影響

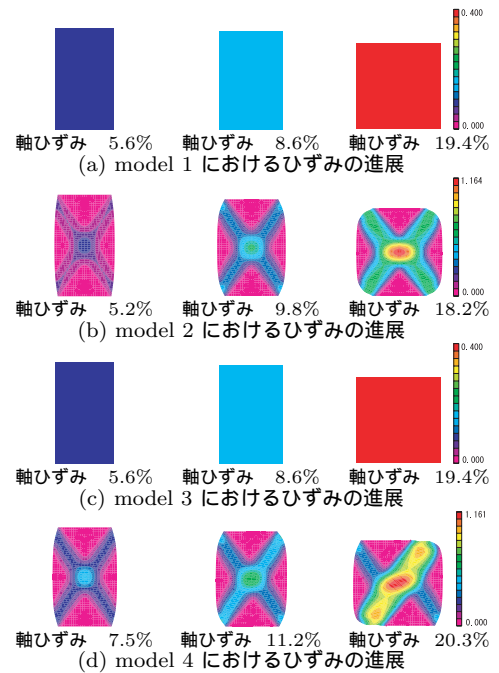


図-10 せん断ひずみの進展

## 4. 実験における破壊モードと数値解析結果の比較

本章では、前章で用いた解析モデルと同様な拘束条件、荷重条件下で行った豊浦砂の平面ひずみ圧縮試験の結果を引用し、本研究の弾塑性解析によって得られた結果との比較を行う。

### 4.1 実験から見た形状効果の分岐荷重へ及ぼす影響

図-11 は、形状比 ( $H_0/W_0 = 1.45, 1.85, 2.25$ ) における豊浦砂の平面ひずみ圧縮試験の軸ひずみ  $\varepsilon = 20\%$  時の変形挙動を図中の右側に、前章 3.1 において行った弾塑性分岐解析において、実験と近い形状比で、類似する変形挙動を示しているケースの軸ひずみ  $\varepsilon = 20\%$  前後のひずみの度合いを図中の左側に示したものである。

これにより、非常に酷似した変形形態を示していることが分かる。また、供試体形状比とそれに伴い発現しやすい分岐モードとの関連性の観点から見たとき、実験結果の変形形態を分岐モードに分類すると、 $H_0/W_0 = 1.45$  では対称 1 次モード、 $H_0/W_0 = 1.85$  では対称 1 次モードもしくは対称 2 次モード、また、 $H_0/W_0 = 2.25$  では反対称 1 次モードに類似した変形形態を示している。これは、各形状

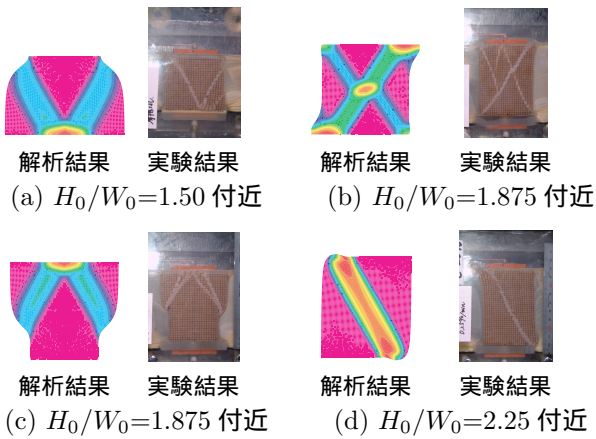


図-11 形状比 ( $H_0/W_0=1.45, 1.875, 2.25$ ) における解析結果と実験結果の比較

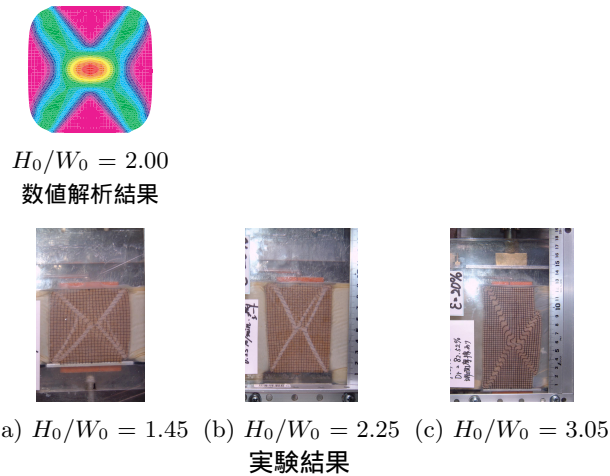


図-12 上下端面を拘束したときの解析結果と実験結果の比較

比ごとに低い分岐荷重で発生しやすい分岐モードがあるという前章での考察を裏付ける結果と言える。

#### 4.2 供試体の上下端面を拘束した場合の変形挙動

前章 3.2 で扱った model2 について、同様の境界条件下で行った実験結果と比較する。ここでの境界条件は 図-8 中の model2 に示すとおりであり、平面ひずみ供試体の荷重載荷面(上端面)は  $x$  方向、供試体接地面(下端)は  $x, y$  方向の変位を拘束している。これにより、荷重載荷開始直後から供試体中央部にひずみが集中し、徐々にその度合いが増してくる。また、図-12 の上側には、弾塑性解析による  $H_0/W_0 = 2.00$  におけるひずみの度合いを示す。この model2 の場合、分岐は発生せず、終始一定のモードのまま同図のような変形が進行する。形状変化は  $\times$  印型の変形挙動を示す。図-12 下側の写真部分は、上記の解析モデルと同様な境界条件下において、形状比を  $H_0/W_0 = 1.45, 2.25, 3.05$  の 3 通りに変化させたときの実験結果を示したものである。

実験結果において図より、上下端面が全て拘束されている場合には、形状比に関係なく供試体中央部に  $\times$  印型のせん断帯が発生しており、前節のように様々破壊形態を示すことなく、全ケースにおいて同じ形状で破壊していることが分かる。このことより、本研究で行った、弾塑性分岐解析の結果と実験結果の関連性が存在することが言える。

## 5. 結論

本研究では、形状比を様々に変動させた平面ひずみ矩形供試体について、弾塑性有限要素法を用いた数値解析的な拡散型分岐モード解析を行い、分岐荷重や分岐モードに対する供試体形状比の影響について調べた。また、平面ひずみ矩形供試体の端面境界条件を変えることにより、発生する分岐モードや分岐後のつり合い経路、ならびに変形局所化の進展の相違について調べた。これにより、平面ひずみ矩形供試体の形状効果や端面境界条件による影響について以下のような結論が得られた。

1. 供試体形状比の変化に対し、各分岐モードごとの分岐荷重は極値を持った増減の変動を示すことが分かった。同時に、分岐モードが低次になるほど分岐荷重の最小値が小さくなる傾向が見られた。しかし、基本経路を辿っていく過程で、必ずしも低次の分岐モードが順に発生するわけではないことが確認された。
2. 各供試体形状比において、分岐荷重の最も低い分岐モードは比較的 low order のモードに限られていることが分かった。つまり、いずれの供試体形状比においても低い分岐荷重で発生しやすい分岐モードは、比較的 low order の分岐モードである。
3. 豊浦砂の実験結果と比較した場合、供試体形状比ごとに発生しやすい破壊形態は、数値分岐解析により低い分岐荷重で発生しやすいことが確認された。低次のモードと類似していることが分かった。
4. 端面境界条件による影響により、発生しうる分岐モードに限られることがあり、局所化進展挙動は大きく異なることが分かった。上下端面が全て拘束されている場合には、形状比に関係なく供試体中央部に  $\times$  印型のせん断帯が発生することが分かった。しかし、上部のキャップの  $x$  方向の変位を自由とした場合には、前者の結果と異なり、途中から左右の対称性を喪失して一本のせん断帯のみが進行していくモードジャンプの挙動が見られた。

#### 参考文献

- 1) 山川 優樹, 池田 清宏, 須藤 良清, 寺井 信夫, 鳥居 邦夫: 砂の三軸試験供試体の分岐変形モードと寸法・形状効果土木学会論文集, 掲載予定, 2002
- 2) 山川 優樹, 寺田 賢二郎, 池田 清宏, 鳥居 邦夫: 圧縮場における弾塑性体の分岐解析とパスジャンプ挙動, 土木学会論文集, 掲載予定, 2002.
- 3) 藤井 文夫, 野口 裕久: 固有値解析を必要としない大規模非線形構造系の分岐座屈モードの求め方, 構造工学論文集, Vol. 46A, pp. 241-250, 2000.
- 4) 野口 裕久, 久田 俊明: Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol. 58, No. 555, pp. 2191-2198, 1992.
- 5) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 6) de Borst, R.: Numerical methods for bifurcation analysis in geomechanics, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 59, pp. 160-174, 1989.