

滑りを考慮したケーブル部材の構造解析法に関する研究

建設構造研究室 佐野 裕明
指導教官 岩崎 英治
長井 正嗣

1 序 論

ケーブル部材はスポーツ施設や展示場などの大空間構造を実現する上で、また明石海峡大橋や多々羅大橋などの長大な吊橋や斜張橋を実現する上で重要な構造要素である。ケーブル部材がこのような大規模で長大な構造物に用いられるのは、軸引張力のみが生ずる、という力学的な性質に依る所が多い。すなわち、引張力のみが作用するので、その材料強度の限界までの力学的な性能を期待できるからである。

しかし、はりや柱などの構造要素に比べて、作用する荷重によりその形状が大きく変化する非常にフレキシブルな構造要素であることと、荷重が作用するまでその形状が確定しないという設計や施工、構造解析を行う上で、他の構造要素に比べて大きく異なる性質を持っている。このため、応力解析の他に所定の荷重状態での形状決定が重要な問題になる。

構造解析法には、一般に変位を未知量とした変位法と応力を未知量とした応力法があり、周知のように現在では、変位法に基づいた有限要素法による解析が殆どである。しかし、ケーブル部材は荷重が作用し応力が発生するまで、その形状が決まらない、すなわち剛性が定まらないため、変位法に基づいた解析を行う場合には工夫が必要である。また、所定の応力状態での形状を決定するために最適値問題などの数学的手法が必要になる。

ところで、ケーブル構造には、架設途中には支点や、他のケーブル上を滑動し、完成時に固定する形式のものが少なくない。この完成前のケーブルの変形や反力を把握しておく必要がある。また、ケーブル構造の形状は、自重やプレストレス、外力等が作用するまで確定しないので、形状決定の問題も重要である。形状決定の条件は種々あるが、各ケーブルの軸力が等しくなるような条件を考え

る場合には、プレストレスや自重などの荷重が作用する間は、ケーブルが支点や他のケーブル上の交点で移動可能な状態になっていると、これらの点を通るケーブルの軸力を等しくすることが可能である。このような状態は見かけ上、ケーブルが滑車を通して支点や他のケーブルに接続しているものと見なすことができる。

ケーブル要素の全ポテンシャルエネルギーの汎関数を修正して、少ない自由度で解析可能なケーブル要素が提案されている⁹⁾。この要素の独立な変分量は、要素両端の変位と要素内の平衡方程式を解いた時に生じる積分定数であるが、積分定数は各要素に独立な値であるので、これを消去すると、通常の変位法に基づいた剛性方程式に相当する式が得られる利点がある。そこで、本研究では、この手法を更新型ラグランジュの手法に適用し、さらに要素端部に滑車を有する場合のケーブル要素を提案する。

なお、ケーブル要素を誘導する上で、通常用いられる以下の仮定を設ける。

- 1) ケーブルには軸力のみ生じる。
- 2) ケーブルの曲げ剛性は無視できる。
- 3) ケーブルの断面積は、軸力の大きさによらず一定である。

また、滑車の誘導において以下の仮定を設ける。

- 4) 滑車とケーブルとの間の摩擦は小さく無視できる。

2 ケーブル要素の汎関数

有限変位解析の定式化には更新型ラグランジュの手法を用いる。ある増分段階から次の増分段階へのケーブルの変位状態を図1に示す。

ある増分段階のケーブルに沿った座標を x とし、このケーブル上の点 O の空間固定点 \hat{O} に対する位置ベクトルを r とする。この点 O は、新たな荷

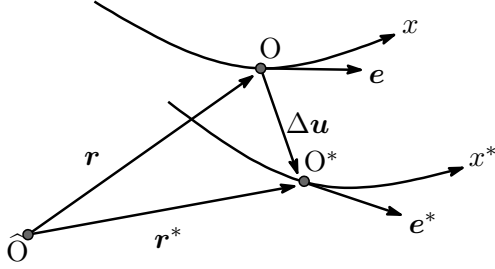


図-1 ケーブルの変位

重の作用により、点 O^* へ移動し、この点の位置ベクトルを r^* とすると、これは変位増分ベクトル Δu から、次のように表される。

$$r^* = r + \Delta u \quad (1)$$

位置ベクトル r と r^* のケーブルに沿った座標 x に関する導関数は、ケーブルの接線の方向を向き、その大きさはケーブルの初期状態からの伸びを表すので、それぞれ、次のようになる。

$$r_{,x} = e, \quad r^*_{,x} = (1 + \Delta\varepsilon_0)e^* \quad (2)$$

ここで、 $(\)_{,x}$ は、 x に関する微分を表している。また、 e, e^* は、それぞれの荷重状態でのケーブルの単位接線ベクトル、 $\Delta\varepsilon_0$ は、ケーブルの伸び率増分を表している。式 (1) を x に関して微分した式に、これらの式を代入すると変位増分と伸び増分の関係を表す次式が得られる。

$$(1 + \Delta\varepsilon_0)e^* = e + \Delta u_{,x} \quad (3)$$

いま、ケーブルに沿った単位長さ当たり q の分布荷重と集中荷重 Q が作用して平衡状態にあるものとする。このときのケーブルに生じている軸力を N とする。この状態のケーブルにさらに分布荷重 Δq と集中荷重 ΔQ が作用したときの平衡状態を考える。このときのケーブルの増分全ポテンシャルエネルギー Π は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_0^l \left(N + \frac{\Delta N}{2} \right) \Delta\varepsilon_0 dx - \int_0^l (q + \Delta q)^T \Delta u dx \\ & - \left[n_x(Q + \Delta Q)^T \Delta u \right]_0^l \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 l は、既知の増分段階でのケーブル長、 n_x はケーブルの端部の断面の外向き法線ベクトルと x 軸との間の方向余弦を表し、 $x = 0$ では $n_x = -1$,

$x = l$ では、 $+1$ の値をとる。また、軸力増分 ΔN は、ケーブルの伸び剛性 EA と伸び増分 $\Delta\varepsilon_0$ の積で与えられる。

3 ハイブリッド型ケーブル要素

式 (4) で変分を受ける独立な量は Δu であり、この式に含まれる $\Delta\varepsilon_0$ は、式 (3) を用いて Δu から与えられる。この関係式 (3) をラグランジュの乗数法を用いて汎関数に含めて、この関係式が、汎関数が停留したときに満足されるような次の汎関数を考える。

$$\Pi_I = \Pi - \int_0^l (N + \Delta N)^T \{ (1 + \Delta\varepsilon_0)e^* - e - \Delta u_{,x} \} dx \quad (5)$$

ここで、 $(N + \Delta N)$ はラグランジュの未定関数ベクトルである。このベクトルは上式の汎関数が停留したときに、軸力ベクトルを表している。

この汎関数で、変分を受ける関数は、 $\Delta\varepsilon_0, \Delta u$ と ΔN であり、この式の停留条件は、部材内部では次のようになる。

$$\delta(\Delta u); \quad (N + \Delta N)_{,x} = -(q + \Delta q) \quad (6a)$$

$$\delta(\Delta\varepsilon_0); \quad (N + \Delta N)^T e^* = N + \Delta N \quad (6b)$$

$$\delta(\Delta N); \quad (1 + \Delta\varepsilon_0)e^* = e + \Delta u_{,x} \quad (6c)$$

また、部材端では次のようになる。

$$\delta(\Delta u); \quad N + \Delta N = n_x(Q + \Delta Q) \quad (7)$$

ところで、式 (5) の $\Delta u_{,x}$ に関する項を部分積分すると、

$$\begin{aligned} \Pi_I = & \int_0^l \left(N + \frac{\Delta N}{2} \right) \Delta\varepsilon_0 dx \\ & - \int_0^l \{ (N + \Delta N)_{,x} + (q + \Delta q) \}^T \Delta u dx \\ & - \int_0^l (N + \Delta N)^T \{ (1 + \Delta\varepsilon_0)e^* - e \} dx \\ & + \left[\{ (N + \Delta N) - n_x(Q + \Delta Q) \}^T \Delta u \right]_0^l \end{aligned}$$

が得られる。ここで、ラグランジュ定数 $(N + \Delta N)$ として、式 (6a) を満足するような関数を選ぶと、上式の汎関数は次のようになる。

$$\Pi_I = \int_0^l \left(N + \frac{\Delta N}{2} \right) \Delta\varepsilon_0 dx$$

$$- \int_0^l (N + \Delta N)^T \{ (1 + \Delta \varepsilon_0) e^* - e \} dx$$

$$+ \left[\{ (N + \Delta N) - n_x (Q + \Delta Q) \}^T \Delta u \right]_0^l$$

上式で、変分を受ける関数を Δu と ΔN の二つだけとし、 $\Delta \varepsilon_0$ と $(N + \Delta N)$ は次式を用いて、 $(N + \Delta N)$ で表すことにする。

$$\Delta \varepsilon_0 = \frac{\Delta N}{EA}, \quad N + \Delta N = (N + \Delta N)^T e^* \quad (8)$$

上式を用いて、汎関数を変形すると次式が得られる。

$$\Pi_C = \int_0^l \left\{ -\frac{\Delta N^2}{2EA} + [(F_x + \Delta F_x) - (N + \Delta N)] \right\} dx$$

$$+ \left[\{ (N + \Delta N) - n_x (Q + \Delta Q) \}^T \Delta u \right]_0^l \quad (9)$$

なお、 $(F_x + \Delta F_x)$ は、 $(N + \Delta N)$ の e 成分である。

上式は、変位 Δu が積分演算の中に含まれず、 $x = 0$ と l の境界の項に現れるだけなので、ケーブル内部での変位を節点での変位から補間する必要がない。この式は、応力仮定のハイブリッド型変分原理の汎関数に相当している。ケーブル要素の場合、有限変位問題においても平衡方程式を満足する応力を容易に誘導でき、この方程式の一般解は容易に表すことができ、 $(N + \Delta N)$ は、次式のようになる。

$$N + \Delta N = c + \Delta c - \int_0^x (q + \Delta q) dx$$

この式中の $c + \Delta c$ は積分定数である。したがって、汎関数 Π_C に含まれる変分を受ける関数は、ケーブル端部での変位 $\Delta u_a (= \Delta u(0))$ 、 $\Delta u_b (= \Delta u(l))$ と積分定数 Δc である。

4 滑車を有するケーブル要素

図2のように、ケーブル (h)、(i)、(j) が節点 I、J に取り付けられた滑車を介して接続されたケーブルの系を考える。滑車を介して接続されたケーブルの軸力は、滑車の摩擦がなければ滑車部で等しくなるので、この条件を汎関数に含めることにより、滑車を表現できる。各ケーブル要素の汎関数を $\Pi_C^{(h)}$ 、 $\Pi_C^{(i)}$ 、 $\Pi_C^{(j)}$ とすると、滑車を有するケーブルの汎関数は次のように表される。

$$\Pi_C = \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)}$$

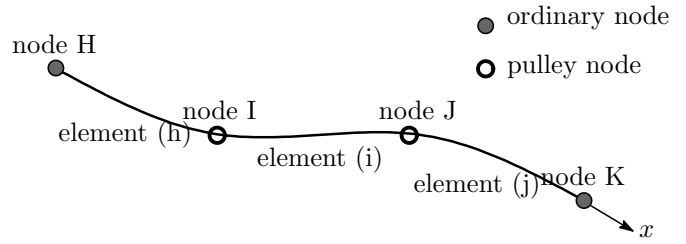


図-2 滑車を有するケーブル

$$+ \Delta \tilde{u}_I \{ (N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)}) - (N_I^{(i)} + \Delta N_I^{(i)}) \}$$

$$+ \Delta \tilde{u}_J \{ (N_J^{(i)} + \Delta N_J^{(i)}) - (N_J^{(j)} + \Delta N_J^{(j)}) \} \quad (10)$$

ここで、 $\Delta \tilde{u}_I$ 、 $\Delta \tilde{u}_J$ は、ラグランジュの未定係数であるが、汎関数が停留したときには、それぞれ滑車を有する節点 I と J のケーブルの滑り変位を表している。この変位は、ケーブルに沿った x 軸方向の変位を正としている。また、式中の $(N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)})$ の添え字は、要素 (h) の節点 I での軸力を表している。

上式を変形して、要素ごとに表すと、

$$\Pi_C = \Pi_C^{(h)} + \Delta \tilde{u}_I (N_I^{(h)} + \Delta N_I^{(h)})$$

$$+ \Pi_C^{(i)} - \Delta \tilde{u}_I (N_I^{(i)} + \Delta N_I^{(i)}) + \Delta \tilde{u}_J (N_J^{(i)} + \Delta N_J^{(i)})$$

$$+ \Pi_C^{(j)} - \Delta \tilde{u}_J (N_J^{(j)} + \Delta N_J^{(j)}) \quad (11)$$

これより、要素の両端に滑車のある一般的な場合のケーブル要素の汎関数は次のように表される。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u} (N + \Delta N)]_0^l \quad (12)$$

5 計算例

5.1 傾斜ケーブルでの精度の比較

図3のように、ケーブル端に高低差のあるモデルを対象に、両端の水平距離 b を変えた場合の精度を、積分方法と積分点数、積分区間数を変えて調べる。伸び剛性が $EA = 150 \text{ MN}$ 、分布荷重が $q = 50 \text{ N/m}$ 、無応力時のケーブル長が $l = 100 \text{ m}$ とする。また、2要素を用いる。

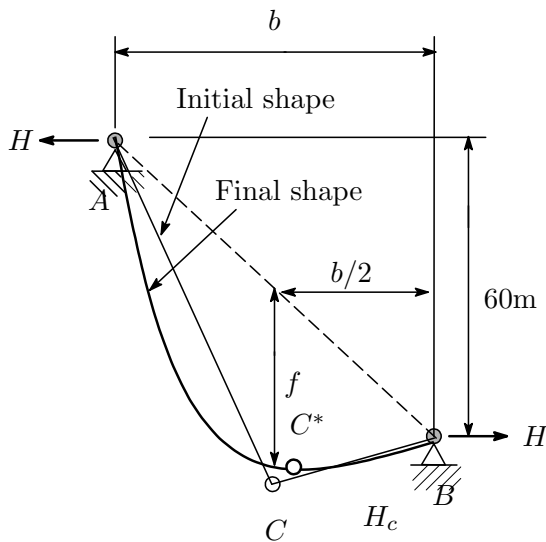
表1と表2に、それぞれガウス積分と台形則による積分を用いた場合の支点水平反力 H とサグ f の正解との比を示している。台形則による積分を用いた場合には、 $b = 20 \text{ m}$ で解が得られない場合が

表-1 ガウス積分による傾斜ケーブルの解析

積分 点数	b=60m		b=40m		b=20m	
	H	f	H	f	H	f
2	1.0013	1.0517	1.0212	1.0527	1.2060	1.0379
3	0.9979	1.0437	1.0028	1.0352	1.0641	1.0290
4	0.9999	1.0425	0.9969	1.0300	1.0171	1.0216
5	1.0000	1.0425	0.9989	1.0283	1.0028	1.0172
6	1.0000	1.0425	0.9998	1.0280	0.9974	1.0150
7	1.0000	1.0425	1.0000	1.0281	0.9966	1.0137
8	1.0000	1.0425	1.0000	1.0281	0.9978	1.0131
9	1.0000	1.0425	1.0000	1.0281	0.9990	1.0128
10	1.0000	1.0425	1.0000	1.0281	0.9996	1.0128
解析解 ⁵⁾	1110.02N	29.435m	459.27N	39.820m	153.19N	46.317m

表-2 台形則による傾斜ケーブルの解析

積分 区間数	b=60m		b=40m		b=20m	
	H	f	H	f	H	f
2	0.9963	0.9894	0.8585	0.9659	—	—
3	1.0002	1.0158	0.9244	0.9880	—	—
4	1.0007	1.0268	0.9583	1.0005	0.8004	0.9776
5	1.0006	1.0322	0.9747	1.0083	0.8503	0.9852
6	1.0005	1.0353	0.9834	1.0134	0.8834	0.9897
7	1.0004	1.0372	0.9884	1.0169	0.9083	0.9929
8	1.0003	1.0384	0.9914	1.0193	0.9273	0.9955
9	1.0003	1.0393	0.9935	1.0210	0.9419	0.9977
10	1.0002	1.0399	0.9948	1.0223	0.9530	0.9995
解析解 ⁵⁾	1110.02N	29.435m	459.27N	39.820m	153.19N	46.317m



$EA=150MN, q=50N/m, l=100m$

図-3 傾斜ケーブルの解析

あった．図4にそれぞれのbのときのケーブルに沿った座標に関する軸力の逆数を示している．これより，bが小さくなると，この値が急激に変化する部分が生ることが分かる．積分次数や区間数

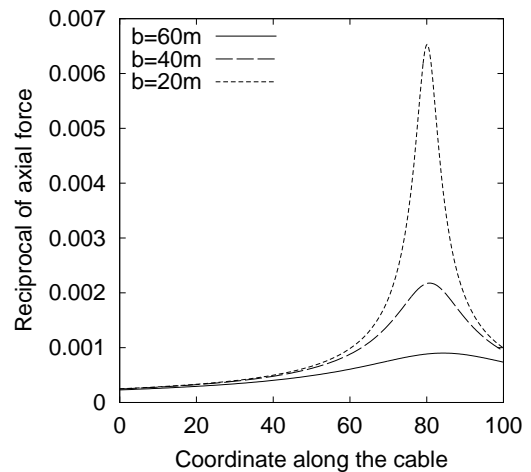


図-4 ケーブル軸力の逆数

を増やさなければ，この部分の積分が正確に求められていないために，解が収束しないものと思われる．

なお，サグfは図3のように，両端を結んだ直線の中間点からケーブルまで鉛直に下ろした直線の距離として定義されるが，表中の結果は，両端

を結んだ直線の間接点から点 C^* までの鉛直距離を示している。これは、初期状態での点 C は、変形後に、水平方向の多少の変位を生じるため、点 C^* は中間点からずれていることによる。このため、サグ f は積分次数や積分区間数を増やすと、1.0 より多少大きめの値に収束する結果となっている。

5.2 ケーブルネット

図5のようなケーブルネットの解析を行う。通常、ケーブルネットの設計では、作用荷重により一部のケーブルにたるみが生じないように、想定する荷重の基で軸力が一定になるように設計することがある。このような軸力一定の制約条件のもとでケーブルの初期形状を決定することは形状決定問題と呼ばれ、最適値問題の手法を用いて解かれる。滑車を用いることで作用荷重の基でケーブルに生じる軸力を一定とできるので、滑車を用いることでこの問題に対応できることを、この計算例により示す。

図中の節点 1, 2, 3, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 23, 24 は固定支持されているものとする。また、図中の●印の節点は通常の節点であり、○印の節点は滑車を有する節点である。節点 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19 には 2 方向にケーブルが交差しており、この 2 本のケーブルが滑車内を通っているものとする。また、初期張力を作用させるために、節点 9, 15, 21, 25, 26, 27 は鉛直方向にだけ移動可能なローラ支点とし、鉛直荷重 $P=10\text{kN}$ を作用させる。そのときの変形図を図 6(a) に示す。この状態で全てのケーブルには 10kN の張力が生じている。なお、ケーブルの伸び剛性は、 $EA=150\text{MN}$ である。さらに、 $q=50\text{N/m}$ の分布荷重を作用させたときの変形状態を図 (b) に示す。これらの変形状態での各節点の変位は表 3 に示している。

6 結論

ケーブル要素の汎関数を修正し、両節点での変位から要素内での変位を補間する必要の無い汎関数を示し、この汎関数によるケーブル要素の剛性方程式を誘導した。この要素は、剛性方程式の積分を正確に行えば、ケーブル要素の正しい剛性方程式が得られるので、少ない自由度で、大きくたわ

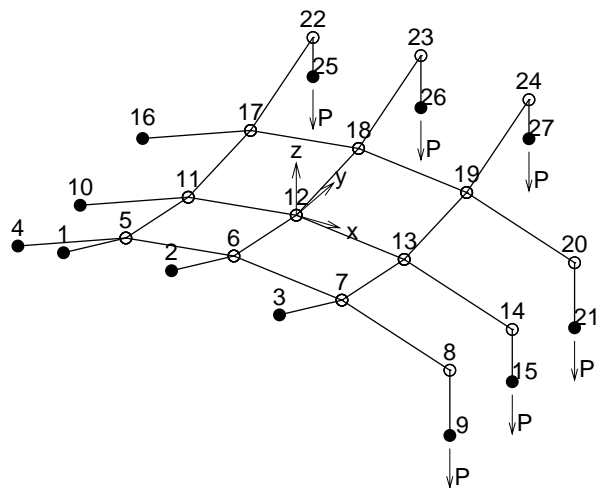


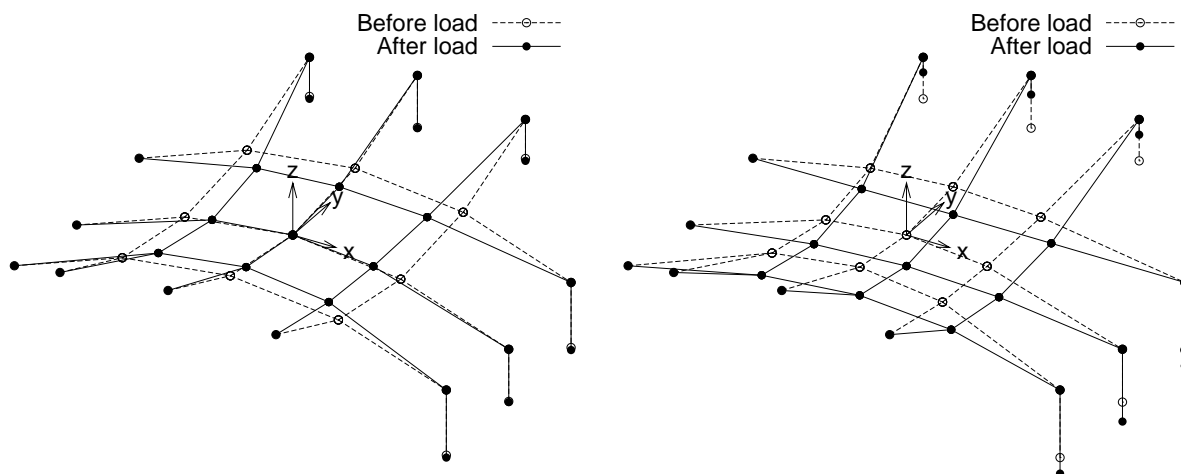
図-5 ケーブルネット

んだ状態のケーブルの解析が行えることを示した。

また、汎関数に隣接するケーブル要素間の軸力が等しい条件を付加することにより、節点に滑車を有するケーブル要素の剛性方程式を誘導し、数値計算により、その妥当性と有効性を示した。

参考文献

- 1) 中西 宏, 波田凱夫: 曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, 第 318 号, pp.41-50, 1982.
- 2) 謝 旭, 伊藤 学, 山口広樹: Updated Lagrangian 手法に基づく柔ケーブルの非線形解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.427-434, 1995 年 3 月.
- 3) 林 正, 岩崎英治, 山野長弘, 時 譲太: ハイアラキ要素によるケーブル構造の有限変位解析, 土木学会論文報告集, No.668/I-54, pp.207-216, 2001.
- 4) 阿井正博, 西岡 隆, 奥村敏恵: ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, 第 260 号, pp.17-32, 1977.
- 5) 後藤茂夫: 柔ケーブル材の接線剛性方程式について, 土木学会論文報告集, 第 270 号, pp.41-49, 1978.
- 6) 真柄栄毅, 国田二郎, 川股重也: 混合法によるケーブルネットの解析 その (2) 幾何学的非線形問題の厳密解, 日本建築学会論文報告集, 第 220 号, pp.35-45, 1974.
- 7) B. M. McDonald and A. H. Peyrot: Analysis of Cable Suspended in Sheaves, *J. Struct. Engng., ASCE*, Vol.114, No.3, 1988.
- 8) M. Aufaure: A Finite Element of Cable Passing Through a Pulley, *Computers & Structures*, Vol.46, No.5, pp.807-812, 1993.
- 9) 岩崎英治, 林 正: 修正された変分原理による空間曲線材の有限変位解析, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.367-380, 1991.



(a) 集中荷重による変形

(b) さらに分布荷重が作用したときの変形

図-6 ケーブルネットの変形

表-3 ケーブルネットの初期座標値と変位

節点 番号	座標値 (m)			集中荷重による変位 (m)			集中+分布荷重による変位 (m)		
	x	y	z	u	v	w	u	v	w
1	-25.0000	-50.0000	15.0000						
2	0.0000	-50.0000	20.0000						
3	25.0000	-50.0000	15.0000						
4	-50.0000	-25.0000	-15.0000						
5	-25.0000	-25.0000	0.0000	5.2744	5.2744	-0.0000	3.0749	4.9286	-9.3264
6	0.0000	-25.0000	50.0000	0.0000	6.3365	-1.8957	0.0118	6.2402	-12.6322
7	25.0000	-25.0000	0.0000	-5.2744	5.2744	-0.0000	-3.0415	4.9219	-9.2615
8	50.0000	-25.0000	-15.0000						
9	50.0000	-25.0000	-40.0000			-0.9237			-7.0735
10	-50.0000	0.0000	-20.0000						
11	-25.0000	0.0000	-50.0000	6.3365	0.0000	1.8958	3.5940	-0.0103	-8.7077
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0136	-0.0130	-11.8989
13	25.0000	0.0000	-50.0000	-6.3364	0.0000	1.8959	-3.5515	-0.0105	-8.6243
14	50.0000	0.0000	-20.0000						
15	50.0000	0.0000	-40.0000			-0.2662			-7.7387
16	-50.0000	25.0000	-15.0000						
17	-25.0000	25.0000	0.0000	5.2744	-5.2744	0.0000	3.0849	-4.9727	-9.3010
18	0.0000	25.0000	50.0000	0.0001	-6.3364	-1.8959	0.0116	-6.2987	-12.5952
19	25.0000	25.0000	0.0000	-5.2744	-5.2744	-0.0000	-3.0510	-4.9656	-9.2362
20	50.0000	25.0000	-15.0000						
21	50.0000	25.0000	-40.0000			-0.9238			-7.0453
22	-25.0000	50.0000	15.0000						
23	0.0000	50.0000	20.0000						
24	25.0000	50.0000	15.0000						
25	-25.0000	50.0000	0.0000			-0.9231			9.2341
26	0.0000	50.0000	0.0000			-0.2662			12.6298
27	25.0000	50.0000	0.0000			-0.9231			9.1415