

有限回転を考慮した骨組構造解析に関する研究

建設構造研究室 本田 博紀
 指導教官 岩崎 英治
 長井 正嗣

1 序 論

近年、幾何学的非線形問題に適用できる汎用の骨組構造解析プログラムが開発されてきているが、それらの要素の定式化には変位を微小と仮定した、たわみの導関数とたわみ角が等しいとする関係式を用いて定式化を行っているものが多い。しかし、幾何学的非線形解析では節点での変位や回転が有限な値で表わされるために、このような手法では正しい解析が行われておらず、解の精度に悪影響を与えている可能性がある。

そこで本研究では Bernoulli-Euler はりにおいて回転の一般化変位に非線形項を考慮した定式化を行い解の精度と収束性について既往の手法と比較する。また曲げによるせん断変形と曲げねじれによる二次的なせん断変形を考慮した拡張 Timoshenko はりにについてもせん断変形の非線形項を考慮した定式化を行い、せん断変形の影響の少ない細長い部材に適用して解の精度と収束性の比較をする。

2 骨組部材の有限変位場

骨組部材は、断面内の寸法が部材の長さ方向に比べて小さく、断面内の変形を無視できる(断面剛の仮定)ので、骨組部材の任意点の変位やひずみは、部材軸上の点の変位、回転角や部材軸のねじれ率などで表すことができる。

2.1 座標系と基底ベクトル

骨組部材の部材軸方向に x_1 軸、これに直交する断面内で、互いに直交する方向に、座標系が右手系になるように x_2 軸と x_3 軸を設定する。また、部材軸上の点 O でのこれらの座標軸方向の単位基底ベクトルをそれぞれ e_i ($i = 1, 2, 3$) とする。

骨組部材の変位により、部材軸が変形し、断面が回転する。このとき、断面内に埋め込まれた座標系の方向の基底ベクトルを、それぞれ e_i^* で表す。このとき、断面剛の仮定より、 e_2^* と e_3^* は互いに直交し、単位の長さをもっている。また、これら

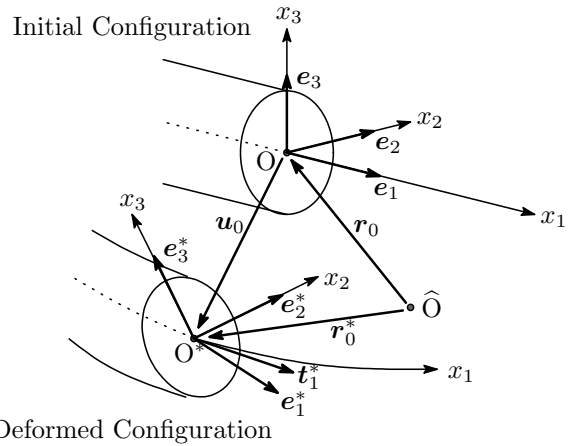


図-1 変位前後の部材軸

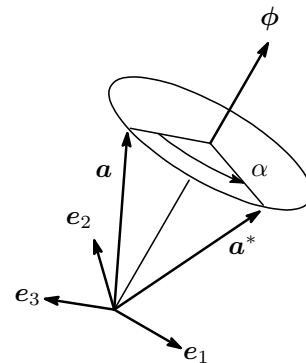


図-2 有限回転

のベクトルに直交した方向に単位ベクトル e_1^* を定義する。さらに、変形した後の部材軸方向の単位接線ベクトルを t_1^* で表す。このベクトルと e_1^* は、曲げによるせん断変形がなければ一致するが、ここでは区別している。これら二つのベクトル e_1^* と t_1^* のずれが曲げによるせん断変形を表している。

2.2 回転ベクトル

いま、図2に示しているように、ベクトル a が、回転軸を表す単位ベクトル ϕ を中心に角 α だけ回転し、ベクトル a^* に移動したものとす。このときのベクトル a^* は、図より次のように表される。

$$a^* = a + \theta \times a - \frac{1}{2}(\theta^T \theta)a + \frac{1}{2}(\theta^T a)\theta \quad (1)$$

ここで、回転軸を表すベクトル ϕ と回転角 α から次のような回転ベクトル θ を定義している。

$$\theta = 2 \tan \frac{\alpha}{2} \phi \equiv \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \theta_3 e_3 \quad (2)$$

この回転ベクトル θ の x_i 座標軸成分を θ_i で表している。また、有限要素法等による幾何学的非線形解析を、増分形式の更新型 Langrange の手法で行う場合や線形座屈解析の場合には、変位や回転量の 3 次以上の微小項は省略できるので、式 (1) は、回転ベクトルの 3 次以上の項を省略している。

上式の a を e_1, e_2, e_3 で置き換えると、 e_i^* は、回転ベクトルの成分により次のように表される。

$$e_i^* = \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\theta_j^2 + \theta_k^2) \right\} e_i + \left(\theta_k + \frac{1}{2}\theta_i\theta_j \right) e_j - \left(\theta_j - \frac{1}{2}\theta_i\theta_k \right) e_k \quad (3)$$

なお、添え字 i, j, k は、この順番で循環して 1, 2, 3 の値をとる。

2.3 部材軸の変形量

初期状態には、直線であった部材は、変位後には曲線状の部材になっている。この部材軸のねじれ率を κ_1 、部材軸を x_2 と x_3 軸の法平面上に投影した曲線の曲率をそれぞれ κ_2, κ_3 とすると、基底ベクトル e_i^* の部材軸に関する導関数は、次のように表される。

$$e_{i,1}^* = \kappa_k e_j^* - \kappa_j e_k^* \quad (4)$$

ここに、 $(\)_{,1}$ は、 x_1 に関する導関数を表している。

単位基底ベクトル e_i^* は、互いに直交しているので、上式よりねじれ率と曲率は次のように表される。

$$\kappa_i = (e_k^*)^T e_{j,1}^* = -(e_j^*)^T e_{k,1}^* \quad (5)$$

上式に、式 (3) とその導関数を代入し、回転角に関する 3 次以上の高次項を省略すると、次式が得られる。

$$\kappa_i = \theta_{i,1} + \frac{1}{2}(\theta_k\theta_{j,1} - \theta_j\theta_{k,1}) \quad (6)$$

ところで、変位前の部材軸上の点 O が変位後、点 O^* に移動したときの変位ベクトルを u_O で表し、変位前の点 O の位置ベクトルを r_O で表すと、変位後の部材軸上の点 O^* の位置ベクトル r_{O^*} は、

$r_O + u_O$ で与えられる。この変位ベクトル u_O の x_i 座標成分を u_i ($i = 1, 2, 3$) で表す。

位置ベクトル r_{O^*} の x_1 に関する導関数は、 x_1 座標軸の接線方向を向いたベクトルであるが、変位後の部材軸の伸びを含んでいるために、単位の長さになっていない。このため、変位後の部材軸の単位節点ベクトル t_1^* は、 $t_1^* = r_{O,1}^*/|r_{O,1}^*|$ と定義され、この式に前式を代入し、変位の 3 次以上の微小項を省略すると、次のようになる。

$$t_1^* = \left\{ 1 - \frac{1}{2}(u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) \right\} e_1 + u_{2,1}e_2 + u_{3,1}e_3 \quad (7)$$

ここで、ひずみは微小としている。また、部材軸の伸び率 ε_0 は、次のように表される。

$$\varepsilon_0 = |r_{O,1}^*| - 1 = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) \quad (8)$$

ところで、曲げによるせん断変形がなければ、 t_1^* は e_1^* に一致することと、せん断変形は細長い部材では微小であることから、 t_1^* と e_1^* のずれはわずかである。そこで、単位接線ベクトルを、せん断変形を表す二つのパラメータ γ_2, γ_3 を導入して、次のように表す。

$$t_1^* = \sqrt{1 - (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)} e_1^* + \gamma_2 e_2^* + \gamma_3 e_3^* \approx e_1^* + \gamma_2 e_2^* + \gamma_3 e_3^* \quad (9)$$

上式中の γ_2, γ_3 は、それぞれ、 $(e_2^*)^T t_1^*$ 、 $(e_3^*)^T t_1^*$ で与えられ、これらの単位ベクトルに式 (3)、(7) を代入すると次式が得られる。

$$\gamma_2 = -\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_2\theta_1 + u_{2,1} + u_{3,1}\theta_1 \quad (10a)$$

$$\gamma_3 = \theta_2 + \frac{1}{2}\theta_3\theta_1 + u_{3,1} - u_{2,1}\theta_1 \quad (10b)$$

Timoshenko はり理論では、上式が断面の曲げによるせん断変形を表している。通常のはり理論 (Bernoulli-Euler はり理論) では、このせん断変形は生じないものとして扱うので、通常のはり理論での回転角と変位の関係式は、上式がゼロという条件式より得られる。この条件式を θ_2, θ_3 について解くと次式が得られる。

$$\theta_2 = -u_{3,1} + \frac{1}{2}u_{2,1}\theta_1, \quad \theta_3 = u_{2,1} + \frac{1}{2}u_{3,1}\theta_1 \quad (11)$$

部材軸のねじれ率と曲率の式 (6) に上式を代入すると、Bernoulli-Euler はり理論でのねじれ率と

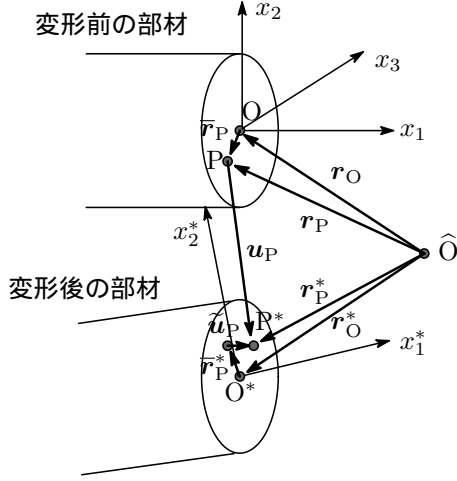


図-3 断面内の任意点の変位

曲率が得られ、次式のようになる．

$$\kappa_1 = \theta_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{3,1}u_{2,11} - u_{2,1}u_{3,11}) \quad (12a)$$

$$\kappa_2 = -u_{3,11} + \theta_1 u_{2,11} \quad (12b)$$

$$\kappa_3 = u_{2,11} + \theta_1 u_{3,11} \quad (12c)$$

2.4 ひずみ

Timoshenko はり理論 まず、拡張 Timoshenko はり理論に基づいた部材のひずみを示す．

図 3 より \hat{O} に対する変形前の断面内の点 P の位置ベクトル r_P は r_O と \bar{r}_P を用いて次式のようになる．

$$r_P = r_O + \bar{r}_P \quad (13)$$

ここで、

$$\bar{r}_P = x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad (14)$$

点 \hat{O} に対する変形後の断面内の点 P^* の位置ベクトルは、ねじれによるそり変位を考慮して、次のように表される．

$$r_P^* = r_O^* + \bar{r}_P^* + \tilde{u}_P \quad (15)$$

上式において、断面剛の仮定より変形後の断面内の任意点 P^* は次のように表すことができる．

$$\bar{r}_P^* = x_2 e_2^* + x_3 e_3^* \quad (16)$$

また、そり変位 \tilde{u}_P は拡張 Timoshenko はり理論の仮定より、St.-Venant ねじりでのそり関数 $\omega(x_2, x_3)$ とそり変位の大きさを表すパラメータ $\psi(x_1)$ の積で表されるものとする．通常の曲げねじり理論では、 ψ はねじれ率 κ_1 に等しくなる．

断面内の任意点に生じるひずみは、次式により定義される．

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{ (r_{P,i}^*)^T r_{P,j}^* - (r_{P,i})^T r_{P,j} \} \quad (17)$$

ひずみが微小との仮定を用いると、上式のひずみ成分は次のように表される．

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_0 - x_2 \kappa_3 + x_3 \kappa_2 - \underline{\omega \psi}_{,1} + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) \kappa_1^2 \quad (18a)$$

$$2\varepsilon_{12} = \gamma_2 - (\omega_{,2} + x_3) \kappa_1 + \underline{\omega_{,2}(\kappa_1 - \psi)} \quad (18b)$$

$$2\varepsilon_{13} = \gamma_3 - (\omega_{,3} - x_2) \kappa_1 + \underline{\omega_{,3}(\kappa_1 - \psi)} \quad (18c)$$

ねじりによるそり変位の影響が無視できる場合には、上式の下線の項を省略できる．この項を省略したものは Timoshenko はり理論のひずみに対応する．なお、上式中のねじれ率 κ_1 、曲率 κ_2 、 κ_3 には式 (6) を用い、せん断変形 γ_2 、 γ_3 には式 (10) を用いる．

Bernoulli-Euler はり理論 次に Bernoulli-Euler はり理論に基づいたひずみを示す．曲げによるせん断変形と曲げねじりによる 2 次せん断変形を無視できる場合には、次の関係式が成り立つ．

$$\gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad \psi = \kappa_1 \quad (19)$$

これらを式 (18) に代入するとひずみは、次式のようになる．

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_0 - x_2 \kappa_3 + x_3 \kappa_2 - \underline{\omega \kappa_{1,1}} + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) \kappa_1^2 \quad (20a)$$

$$2\varepsilon_{12} = -(\omega_{,2} + x_3) \kappa_1 \quad (20b)$$

$$2\varepsilon_{13} = -(\omega_{,3} - x_2) \kappa_1 \quad (20c)$$

ねじりによるそり変位の影響が無視できる場合には、上式の下線の項を省略できる．なお、上式中のねじれ率 κ_1 、曲率 κ_2 、 κ_3 には式 (12) を用いる．

2.5 慣用の近似理論

節点回転角 Bernoulli-Euler はり理論に基づいた有限要素の定式化では、要素内のたわみ u_2, u_3 を節点変位と回転角を用いて 3 次式で表すことが一般的である．このとき、式 (11) のように、回転角 θ_2, θ_3 と変位の導関数 $u_{2,1}, u_{3,1}$ には非線形な関係にあるが、この関係を用いて要素の定式化を行っ

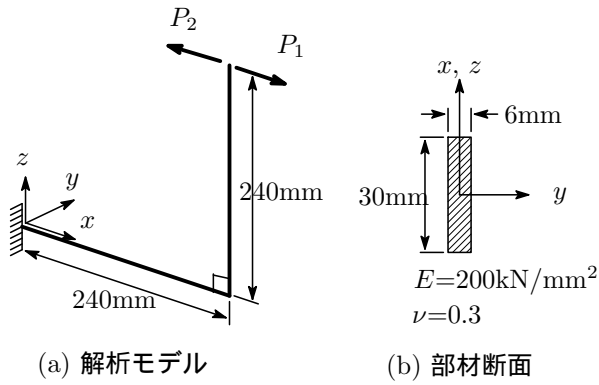


図-4 直角に曲がったはり

ているものは文献³⁾を除いて見受けられない．多くの場合文献¹⁾のように、 $u_{2,1} = \theta_3$ 、 $u_{3,1} = -\theta_2$ の関係を用いている．そこで、本研究では、ひずみ式には式(20)を用い、節点での変位と回転角の関係式に式(11)を用いた要素と非線形項を省略した要素について、線形座屈解析の精度と、有限変位解析での精度および収束性の検討を行う．

曲げによるせん断変形 曲げによるせん断変形の影響を考慮した Timoshenko はり理論やその拡張理論は、せん断変形の影響の現れる部材長の短いはりに適用される．しかし、せん断変形の影響の少ない細長いはりに適用しても Bernoulli-Euler はり理論による解に漸近した解が得られるので、細長い部材にも適用できる．このとき、細長い部材に適用するのであれば、曲げによるせん断変形は小さいので、 γ_2 、 γ_3 の非線形項の影響は小さいものと考えられる．そこで、これらのせん断変形を表す式(10)の非線形項を考慮した場合と無視した場合について線形座屈解析の精度と、有限変位解析での精度および収束性の検討を行う．

2.6 直角に曲がったはりの線形座屈解析

図4に示した直角に曲がったはりの自由端に図のように水平荷重 P_1, P_2 が作用した場合の線形座屈解析を行い、Bernoulli-Euler はり要素での節点回転角の非線形項の影響と Timoshenko はり要素での曲げによるせん断変形の影響を調べる．部材断面とせん断弾性係数 G 、ポアソン比 ν には図に示した値を用いる．

図5に、線形座屈解析による座屈荷重と座屈モードを示す．図(a)は荷重 P_1 が作用したとき、(b)は P_2 が作用したときの結果である．図中の Exact element は非線形項を正確に考慮したはり要素、

Approximate element は節点回転角の非線形項やせん断変形の非線形項を省略したはり要素による解を表わし、(BE) は Bernoulli-Euler はり要素、(T) は Timoshenko はり要素を表わしている．また、各モード図の上に示している括弧内の数値は正しい第一座屈荷重に対する得られた座屈荷重の比を示している．

図5より、Bernoulli-Euler はり要素では P_1 および P_2 のどちらが作用した場合でも Approximate element と Exact element による座屈荷重にはあまり差が見られない．しかし、座屈モードを見ると形状にかなり差があり正しい解析が行われていないことが分かる．Timoshenko はり要素では Approximate element と Exact element による座屈荷重に大きな差が現われ、特に P_1 の荷重条件の場合には Approximate element の結果は、Exact element の2倍近い値となっている．また、座屈モードにも違いが見られる．

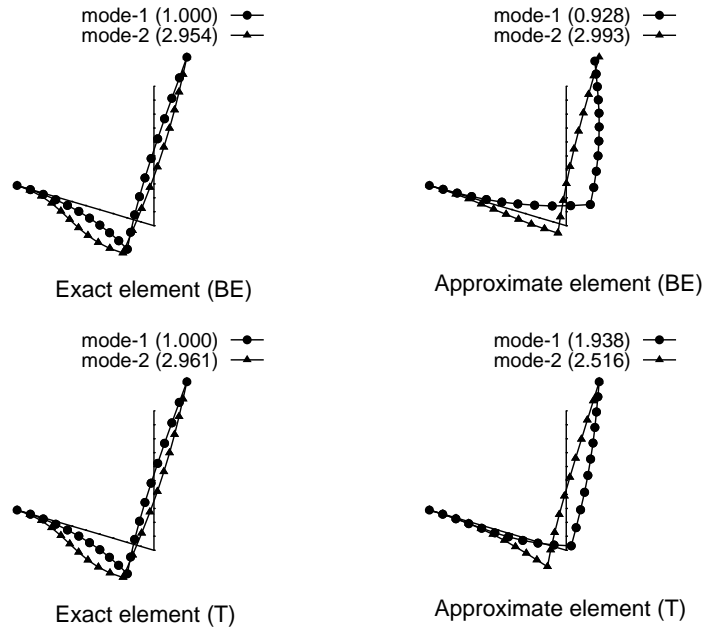
両はり部材において Exact Element の結果を比較すると荷重条件に関わらず座屈荷重、座屈モードとも一致している．これは、せん断変形の影響の少ない細長い部材について解析を行っているため両はり要素での値に差が現われなかったと考えられる．したがって、ここで得られた両はり要素における Exact element の解は正しい解を得られていると言える．このようにせん断変形の影響の少ない部材の解析でも、せん断力が生じるような構造では曲げによるせん断変形の非線形項を考慮する必要のあることが分かる．

2.7 直角に曲がったはりの有限変位解析

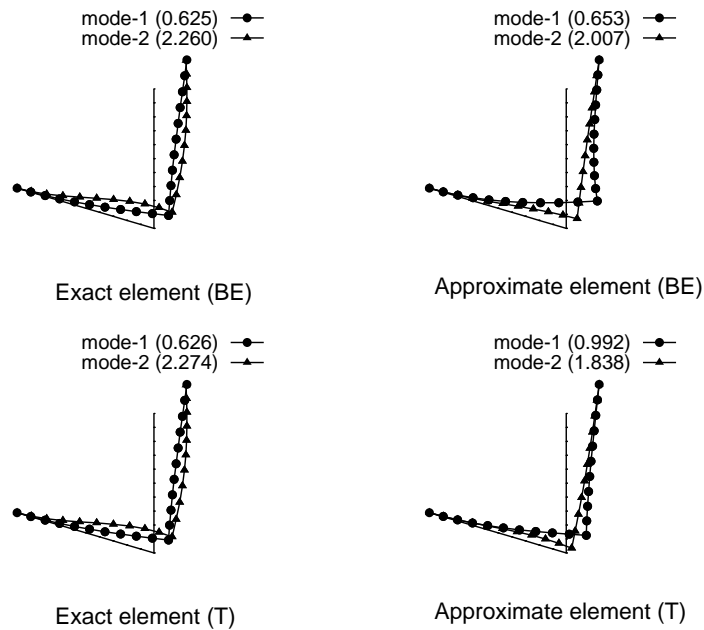
線形座屈解析で用いた解析モデルについて、 y 軸方向に第一座屈荷重の $1/1000$ 倍の荷重を作用させた後、 P_1 あるいは P_2 荷重を載荷し有限変位解析を行って、Bernoulli-Euler はり要素での節点回転角の非線形項と Timoshenko はり要素での曲げによるせん断変形の非線形項に関する解の精度と収束性を調べる．

図6に荷重 P_1 が作用した場合の変位荷重曲線と各増分ステップでの収束回数を、図7に P_2 が作用した場合の変位荷重曲線と各増分ステップでの収束回数を示す．また、荷重変位曲線について縦軸には第一座屈荷重で正規化した荷重係数を横軸には荷重作用点での y 方向変位 v をとっている．

解析結果より、荷重変位曲線では P_1, P_2 どちらの



(a) P_1 による座屈荷重と座屈モード

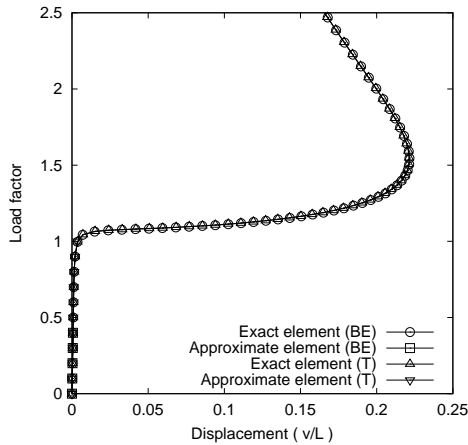


(b) P_2 による座屈荷重と座屈モード

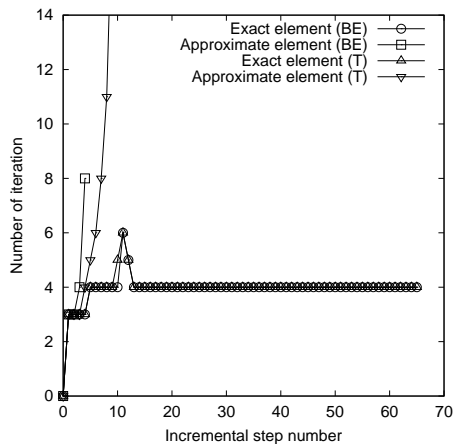
図-5 直角に曲がったはりの線形座屈解析結果

荷重条件においても Bernoulli-Euler はりと Timoshenko はり要素の解に差が現われていないことが分かる。しかし、Bernoulli-Euler はり要素の Approximate element では、座屈荷重付近で解が発散し、収束解が得られなかった。Timoshenko はり要素では、 P_1 が作用したはりでは、解が発散したが、 P_2 が作用したはりでは収束解を得ている。しかし、収束性が非常に悪く、多くの反復回数を要

している。しかし、正しい座屈荷重付近で釣り合い曲線が曲がりだしているので、座屈荷重を正しく再現していることが分かる。このような結果が得られた理由としては、有限変位解析では増分ステップごとに座標系を更新していることと非線形項を省略したことによる影響が幾何剛性行列のみ現われ、解の精度を左右する断面力ベクトルに影響を与えないためと考えられる。

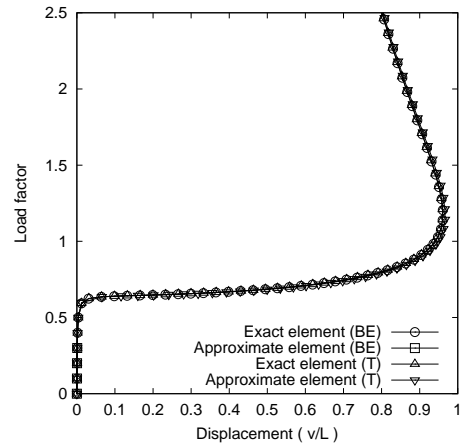


(a) 荷重変位曲線

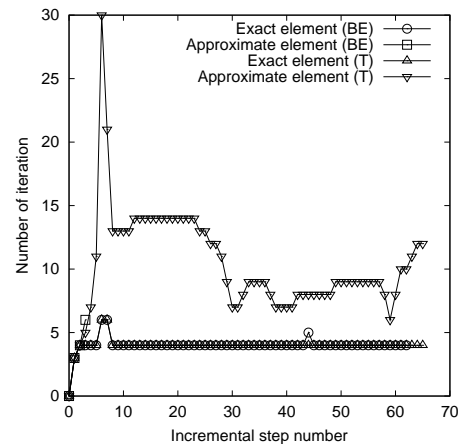


(b) 各増分ステップでの収束回数

図-6 P_1 が作用した場合の有限変位解析結果



(a) 荷重変位曲線



(b) 各増分ステップでの収束回数

図-7 P_2 が作用した場合の有限変位解析結果

3 結論

本研究では、Bernoulli-Euler はり要素の節点回転と Timoshenko はり要素のせん断変形の式に従来は省略される 2 次の非線形項を考慮して幾何学的非線形解析を行い、解の精度と収束性に関して以下のことが明らかになった。

- (1) 線形座屈解析では Bernoulli-Euler はり要素において節点回転角に非線形項を省略した式を用いた場合には正確な解が得られず、有限回転の影響を考慮した式を用いる必要がある。
- (2) また、Timoshenko はり要素をせん断変形の影響の少ない部材に適用した場合でも、せん断変形を表す関係式の非線形項を考慮しなければ、せん断力が卓越するような構造では大きな誤差を生じる。
- (3) 有限変位解析においては、両はり要素共に、非線形項を省略した式を用いても、その影響は幾何剛性行列に与えるだけで解の精度に直接

影響を与えないため、解析結果に線形座屈解析ほどの誤差を生じない。

- (4) しかし、非線形方程式を解くための繰り返し回数が非常に大きくなり、場合によっては収束解の得られない場合がある。

参考文献

- 1) Hasegawa, A., Liyanage, K., Ikeda, T. and Nishino, F. : A Concise and Explicit Formulation of Out-of-Plane Instability of Thin-walled Members, JSCE, No.356/I-3, 1985.
- 2) 林 正, 岩崎英治 : 幾何学的非線形解析における薄肉曲線材の折れ線近似の妥当性, 土木学会論文集, No.392/I-9, pp.327-334, 1988.
- 3) 岩崎英治, 林 正 : 立体骨組構造の有限変位解析の精密化, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.353-366, 1991.
- 4) 岩崎英治, 林 正, 中林隆広 : 拡張 Timoshenko はり要素による細長い部材の非線形解析, 構造工学論文集, Vol.42A, pp.263-274, 1996.