軟弱地盤の弾塑性圧密せん断挙動の有限要素解析

防災設計工学研究室　尾澤　知憲
指導教官　　　大塚　悟

1．はじめに

土構造物の設計では変形や極限状態に着目することが多く，弾塑性変形解析はその有用なツールである．しかし，弾塑性解析は極限状態の近傍で解が発散・振動し，極限状態での解析精度が著しく低下するといった問題がある．よって，従来の設計では変形と安定性を分離し，変形に関しては弾性（弾塑性）変形解析，安定性に関しては極限平衡法を用いてきた．しかし，変形から安定までを統一的に解析できればその工学的意義は大きい．本研究では極限状態に至るまで安定した変形解析を実施するために，非線形方程式の解法に弧長法，応力状態の評価方法に Radial Return Mapping を適用し，弾塑性変形解析プログラムを開発した．更に，土・水連成弾塑性圧密変形解析に拡張する方法を提案し，そのプログラムの開発を行った．

2．弧長法および Radial Return Mapping

2.1．弧長法

一般的な増分型の平衡方程式は，

$$\mathrm{K}\Delta\mathrm{u} = \Delta\mathrm{f} \qquad (2.1)$$

と表される．このとき荷重増分 $\Delta\mathrm{f}$ は既知であり，剛性マトリクス K により変位増分 $\Delta\mathrm{u}$ が解かれる．一方，弧長法は荷重増分を，

$$\Delta\mathrm{f} = \Delta\lambda\mathrm{f}_{ref} \qquad (2.2)$$

のように，荷重の方向 f_{ref} とその大きさ $\Delta\lambda$ に分解する．したがって，弧長法による平衡方程式は，

$$\mathrm{K}\Delta\mathrm{u} = \Delta\lambda\mathrm{f}_{ref} \qquad (2.3)$$

となる．このとき比例荷重係数 $\Delta\lambda$ は未知であるため，荷重増分 $\Delta\mathrm{f}$ も未知となる．弧長法による平衡方程式は未知数が方程式より 1 つ多くなるため，これを解くには次式の制約条件が必要となる．

$$S(\Delta\mathrm{u}, \Delta\lambda) = 0 \qquad (2.4)$$

ここで，制約条件は変位増分と比例荷重係数に課せられる．式(2.3)と式(2.4)を連立して解くことで，変位増分および荷重増分が同時に解かれる．弧長法は荷重ー変位に「1 対 1」関係が喪失する場合でも，安定した解析が可能である．

2.2．Radial Return Mapping

Radial Return Mapping は繰返し計算過程や収束点において応力が降伏関数を満足し，かつ全ひずみ増分を合理的に弾性成分と塑性成分に分離する計算スキームである．本研究では Drucker-Prager 降伏関数を用いている．

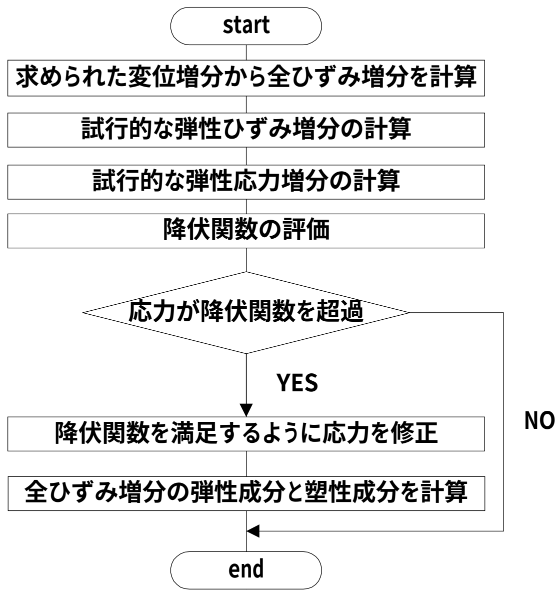


図 1　フローチャート

図 1 はある増分計算における変位増分から応力及び弾性ひずみ，塑性ひずみの増分を定めるアルゴリズムを示している．Radial Return Mapping は試行計算における変位増分の与え方に依らずに収束点においては常に正解であることを保証する点で優れてい

る．各増分計算における力のつり合いは弧長法を用いて解析する．

3．弾塑性変形解析

3.1．弾塑性平衡方程式

弧長法による弾塑性平衡方程式を次に示す．

$$\mathrm{K}\Delta\mathrm{u} = \Delta\lambda \mathrm{f}_{ref} \tag{3.1}$$

$$S(\Delta\mathrm{u}, \Delta\lambda) = 0 \tag{3.2}$$

上式の妥当性について，極限支持力解析を行い，Prandtl の解と比較することで検討する．

3.2．極限支持力解析

解析に用いたメッシュは，縦 20m×横 30m，600 要素であり，8 節点要素を用いた．地盤上に基礎幅 3m の帯基礎を載荷した（図 2）．地盤定数はヤング係数 E=10MPa，ポアソン比 ν=0.3，粘着力 c=10kPa であり，せん断抵抗角 ϕを 0°，10°，20°に変化させて, 自重なし, 平面ひずみ条件で解析を行った．

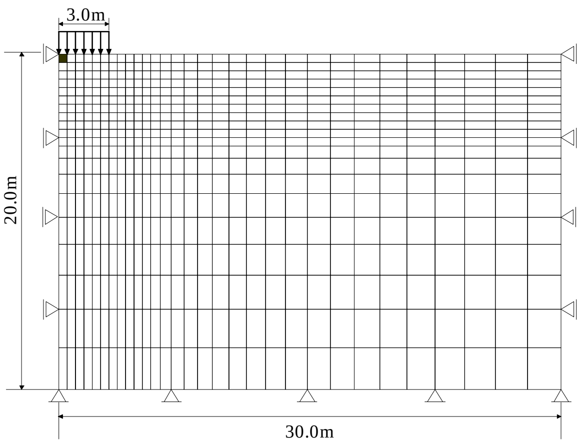
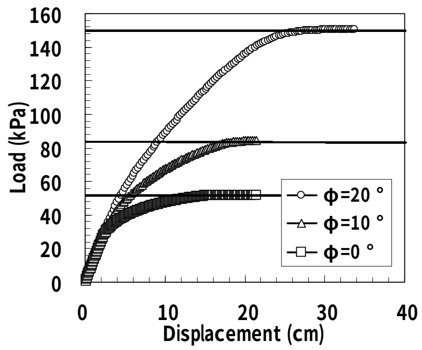


図 2 有限要素メッシュ

図 3 に荷重－変位関係を示す．図下の表は本解析および Prandtl の極限支持力である. 図より荷重と変位に「1 対 1」関係が喪失する場合でも，安定した解析が可能であることが分かる．また，表より本解析による極限支持力は Prandtl の解と良く一致しており，精度の高い解析が行われていることが分かる．

図 4 に基礎中央（図 2 の黒ハッチ部）での応力経路を示す．図中の黒線は Drucker-Prager 降伏関数である．図では応力が弾性限界に達した後に極限状態まで降伏関数上を移動している．これは荷重の載荷によって徐々に地盤の破壊域が拡大することと，摩擦則に従う地盤材料では荷重の載荷によって応力が増加すると共に，せん断強度の増加が生じることに因る．Radial Return Mapping を適用したことで厳密な解析が可能になった．



極限支持力 (単位:kPa)

ϕ	本解析	Prandtl
0°	52.01	51.40
10°	84.49	83.45
20°	150.51	148.35

図 3 荷重－変位関係

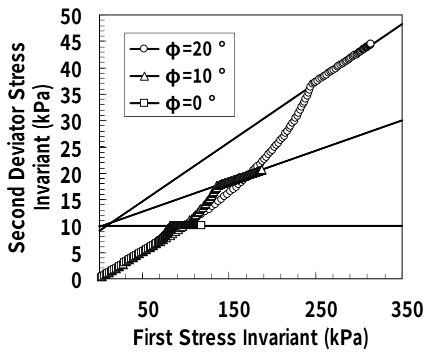


図 4 応力経路

図 5 に ϕ=0°および ϕ=20°の極限状態でのひずみ分布図を示す. 図中の白線は Prandtl が仮定したすべり線である. 図より Prandtl の仮定したすべり線と本解析による破壊形態は良く一致している．また，せん断抵抗角の増加に伴い破壊形態も拡大することが分かる．以上より本解析手法による弾塑性変形解析の妥当性が確認された．

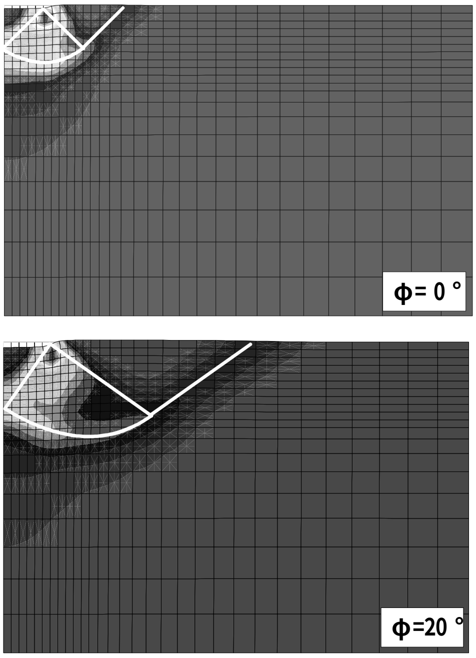


図 5 極限状態でのひずみ分布図

4. 土・水連成弾塑性圧密変形解析

4.1. 圧密方程式

本研究では Biot の多次元圧密方程式を基に，弾塑性変形解析で用いた方法を拡張し，土・水連成弾塑性圧密変形解析プログラムを開発した．盛土の構築問題のように荷重載荷から一定放置による圧密問題までを解析できるように，弧長法の拡張・定式化を行った．その圧密方程式を次に示す．

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & -\mathrm{C} \\ -\mathrm{C}^t & -(\lambda\Delta t_r)\theta\mathrm{H} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta\mathrm{u} \\ \Delta\mathrm{p} \end{Bmatrix} = (\lambda\Delta t_r)\begin{Bmatrix} \dot{\mathrm{f}} \\ \mathrm{H}\mathrm{p}_n \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

$$S(\Delta\mathrm{u}, \Delta\mathrm{p}, \lambda) = 0 \qquad (4.2)$$

式(4.1)は土骨格の平衡方程式と水の浸透方程式を連立させた形式になっており，これを土・水連成と呼ぶ．時間に対しては差分法を適用し，間隙水圧 $\mathrm{p}(t)$ には θ法を適用した．

$$\mathrm{p} = (1-\theta)\mathrm{p}_n + \theta\mathrm{p}_{n+1} = \theta\Delta\mathrm{p} + \mathrm{p}_n \qquad (4.3)$$

ここで，$\Delta\mathrm{p} = \mathrm{p}_{n+1} - \mathrm{p}_n$ とした．式(4.2)は制約条件であり，変位増分 $\Delta\mathrm{u}$，間隙水圧増分 $\Delta\mathrm{p}$，比例時間係数 λ に課せられる．時間増分 $\Delta t_r = 1$ に対して比例時間係数を適用しており，荷重一定放置 $\dot{\mathrm{f}} = 0$ の圧密問題に対しても解析が可能である．ここで, 式(4.1), (4.2)を弧長法による圧密方程式と定義する．方程式の妥当性については一次元弾性圧密解析を行い，Terzaghi の理論解と比較することで検討する．

4.2. 一次元弾性圧密解析

解析で用いたメッシュは縦 9m×横 1m，9 要素であり，変位 8 節点（●），水圧 4 節点（○）の複合要素を用いた（図 6）. 地盤定数はヤング係数 E=10MkPa, ポアソン比 ν=0.3，透水係数はレキ，砂，シルトを想定し，平面ひずみ条件で解析を行った．初期間隙水圧 100kPa を与えて, 間隙水圧の消散過程について考察を行う．

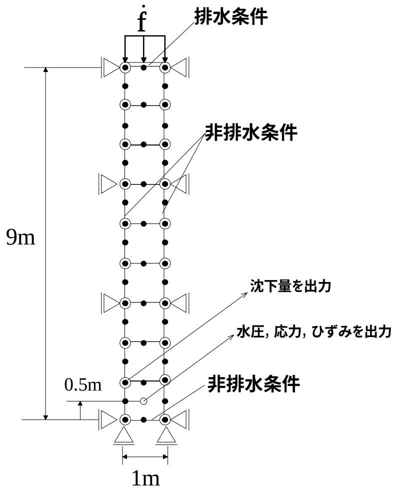


図 6 有限要素メッシュ

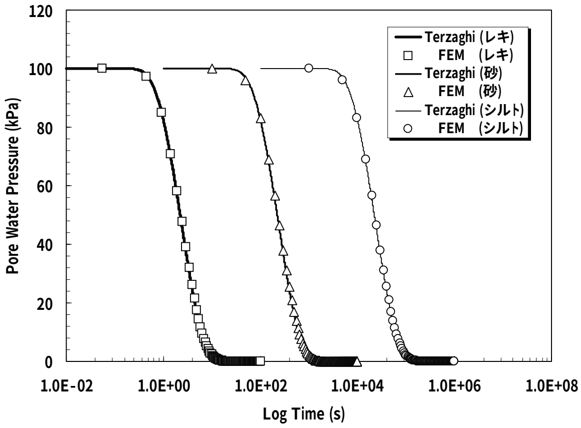


図 7 間隙水圧の経時変化

図 7 に間隙水圧の経時変化を示す．離散値が解析

結果であり，実線が Terzaghi の理論解である．解析結果はモデル底面からの高さ 0.5m でのものである．図より本解析は理論解とよく一致している．また，透水係数が小さくなる程，初期間隙水圧が完全に消散するまでの所要時間が長く，実際の挙動をうまく表現していると考えられる．よって，本解析手法による圧密方程式の妥当性が確認された．

4.3．平面ひずみ供試体のせん断試験

ここでは平面ひずみ供試体のせん断試験シミュレーションを行った．解析で用いたメッシュは縦 1m ×横 1m，49 要素であり，変位 8 節点（●），水圧 4 節点（○）の複合要素を用いた（図 8）．排水条件については図に示す．なお，図中の **4** および **46** は解析結果を出力した要素番号である．地盤定数はヤング係数 E=10MkPa, ポアソン比 ν=0.3, 粘着力 c=10kPa, せん断抵抗角 φ=0°，透水係数はシルトを想定，平面ひずみ条件で解析を行った．

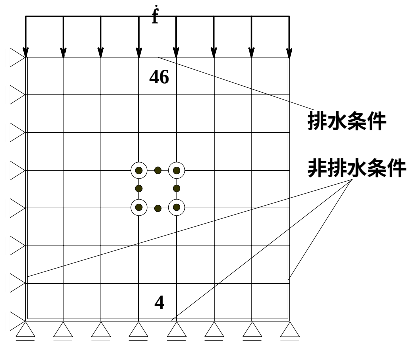


図 8　有限要素メッシュ

図 9 に応力経路, 図 10 に体積ひずみーせん断ひずみ関係を示す．図 9 中の黒線は Drucker-Prager の降伏関数である．図 9 より排水境界から遠い No4 要素は非排水的な挙動を示し，排水境界に近い No46 要素は排水的な挙動を示している．図 10 においても No4 要素は，はじめは間隙水が荷重を受け持つため非圧縮性を示しているが, No46 要素は弾性圧縮している．よって，土・水連成解析の挙動は間隙水の排水・非排水の影響を受けるため，供試体内の要素性が喪失すると考えられる．以上より，解析結果は実際の挙動をうまく表現していると考えられる．

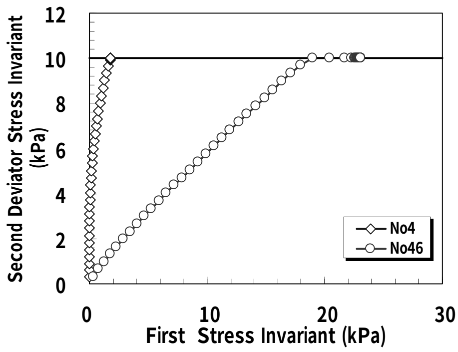


図 9 応力経路

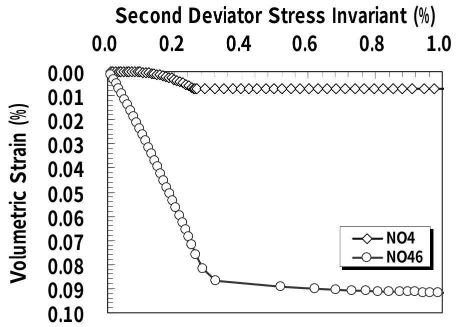


図 10 体積ひずみーせん断ひずみ関係

5．まとめ

本研究では弧長法および Radial Return Mapping を適用した弾塑性変形解析および土・水連成圧密変形解析プログラムの開発を行い，その妥当性について理論解と比較することで確認した．一方，土水連成圧密解析の要素試験シミュレーションにおいて，せん断抵抗角 φ＝0°の場合は良好な解析結果を得るが，せん断抵抗角が大きい場合は有意義な解を得ることが出来なかった．土水連成圧密解析は汎用性について問題が残されており，今後の課題である．

参考文献

1) 野田利弘：限界状態近傍における粘土の弾塑性挙動と，水～土骨格連成有限変形解析に関する研究，学位論文，1994 .
2) 市川康明：地盤力学における有限要素法入門, 日科技連, 1990.
3) 久田俊明：非線形有限要素法の基礎と応用，丸善，1995，p254～258（弧長法）.
4) 日本塑性加工学会：非線形有限要素法，コロナ，1994，p199～206（Radial Return Mapping）.